А. И. КОНДРАШЕВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(кратний курс)

ОМСК ◆ 1973

ПАВЛОДАРСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

А. И. КОНДРАШЕВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(КРАТКИЙ КУРС)

Рекомендовано Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для машиностроительных вузов

ЗАПАДНО-СИБИРСКОЕ КНИЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОМСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1973

Настоящий курс начертательной геометрии предназначается в качестве учебного пособия для машиностроительных и механико-технологических специальностей высших технических учебных заведений.

В нем в краткой форме изложены все основные разделы курса, изучение которых предусмотрено действующей учебной программой.

Цель пособия — дать возможность студенту без большой затраты времени закрепить прослушанный на лекциях или проработанный по учебнику материал, выделить по каждому разделу те узловые вопросы, без усвоения которых невозможно изучение курса.

Наибольшей популярностью при изучении начертательной геометрии пользуется учебник В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского «Курс начертательной геометрии». Он и взят в качестве основного при написании данного пособия.

Краткий курс может служить учебным пособием для студентов всех форм обучения, особенно заочной, и будет полезен изучающим курс в их самостоятельной работе.

Кондрашев Анатолий Иванович

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(краткий курс)

Редактор *Э. М. Харланова.* Технический редактор *Н. В. Бисеров.*
Корректор *И. Ф. Рахвалова.*

Подписано к печати 22/IX 1972 г. УХ00864. Тираж 5000 экз. Бумага типогр. № 2.
Формат 60×90 1/16—9,5 п. л.—8,7 уч.-изд. л. Цена 40 коп.

Западно-Сибирское книжное издательство. Омское отделение. Омск, ул. Ленина, 21.
Типография издательства «Омская правда». Омск, проспект Маркса, 39. Заказ 537.

Глава I

ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

§ 1. Введение

Начертательная геометрия — одна из дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Она изучает законы построения пространственных форм с помощью изображения их на плоскости и способы решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм.

Наши представления о предметах можно передавать, помимо других способов, также методом графического изображения предметов.

С помощью графического изображения можно представить предметы не только существующие, но и воображаемые. Эти графические изображения называются **чертежами**.

Прежде чем изготовить какое-либо изделие или построить какое-либо сооружение, инженер-проектировщик должен полностью представить его и затем каким-то образом передать свой замысел непосредственным исполнителям. Инженер излагает его на чертеже, на котором он показывает точную форму, размеры и взаимодействие отдельных частей изделия или сооружения.

По чертежу дается задание на изготовление какого-либо изделия, текущий контроль и прием готовой продукции.

Трудно представить себе инженера, не умеющего решать пространственные задачи и читать чертежи: чертеж — это язык техники, которая развивается сейчас невиданными темпами.

Начертательная геометрия способствует развитию пространственного мышления и готовит будущего инженера к успешному изучению специальных дисциплин и к техническому творчеству — проектированию.

§ 2. Проекции центральные и параллельные

Основным методом составления технических чертежей является изложенный французским ученым Г. Монжем метод параллельного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, когда любое объемное тело изображается на плоскости в виде его проекций.

Что же такое проекция? Рассмотрим это на простом примере.

Между доской и электрической лампочкой поместим мел и включим свет. Световой луч от лампочки L, падая на мел, даст тень m от мела M на доску D (рис. 1). Переместив мел

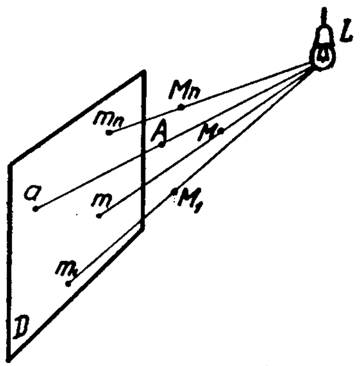


Рис. 1.

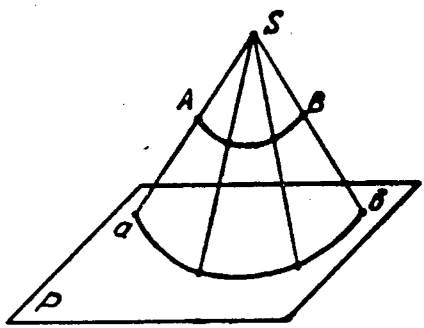


Рис. 2.

в положение M_1, получим новое положение его тени m_1 и т. д.; т. е. каждому положению мела в пространстве будет соответствовать определенное положение его тени на доске.

В данном примере точки m, m_1, ... m_n можно назвать центральными проекциями точек M, M_1, ... M_n, находящихся в пространстве, на плоскости D, точку L — центром проекций, линии LM, LM_1, ... LM_n — проецирующими прямыми или проецирующими лучами и плоскость D — плоскостью проекций.

Для нахождения проекции любой точки A (рис. 1) надо через данную точку и центр L провести проецирующий луч до пересечения его с плоскостью D. Полученная точка a и будет являться проекцией данной точки.

Такой способ проецирования, при котором все проецирующие лучи идут из одного центра, называется *центральным проецированием.*

Для построения центральной проекции какой-либо линии AB (рис. 2) надо через центр проекций S и ряд ее точек провести проецирующие лучи до пересечения с плоскостью проекций P и затем точки пересечения проецирующих лучей с плоскостью проекций последовательно соединить.

Проекция линии и центр проекций еще не определяют точного положения линии в пространстве: на проецирующей поверхности можно разместить множество линий, проецирующихся в одну и ту же линию на плоскость проекций (рис. 3).

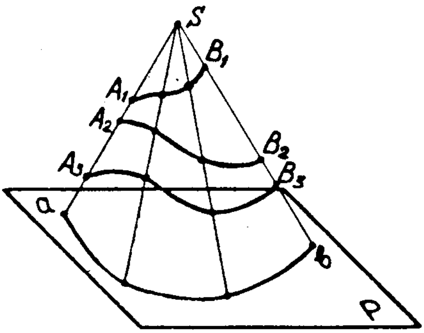


Рис. 3.

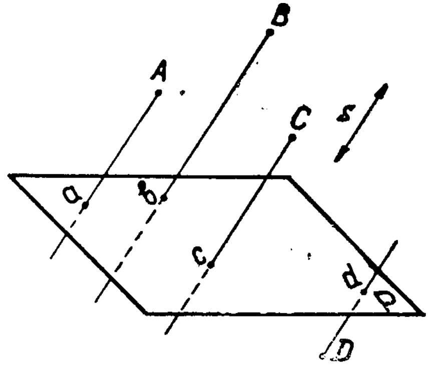


Рис. 4.

Такой способ проецирования называют также *коническим*, так как проецирующие лучи, проведенные через центр проекций S и точки некоторой линии, образуют коническую поверхность.

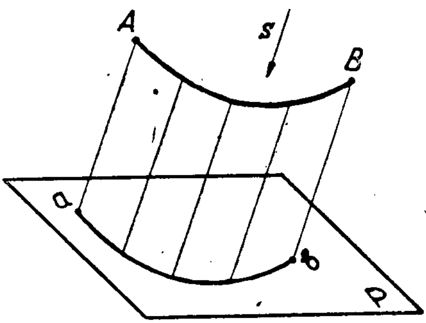


Рис. 5.

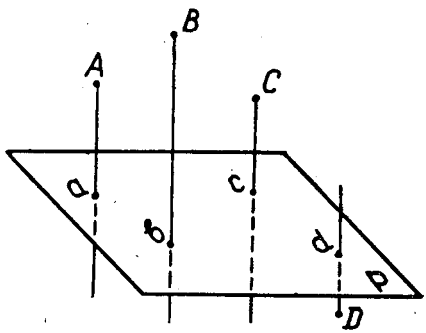


Рис. 6.

От центрального проецирования точки и линии можно перейти к центральному проецированию поверхности и тела.

Рассмотрим теперь другой способ проецирования, который называется *параллельным*.

Предположим, что центр проекций бесконечно удален, тогда все проецирующие лучи будут параллельны между собой. Укажем их направление стрелкой S (рис. 4). Для получения проекций точек A, B, C, D необходимо через эти точки, параллельно выбранному направлению S провести проецирующие лучи до пересечения с плоскостью проекций P. Точки пересечения a, b, c, d и будут параллельными проекциями точек A, B, C, D на плоскость проекций P.

Чтобы получить параллельную проекцию какой-либо линии, надо построить проекции ряда ее точек, затем проекции этих точек соединить (рис. 5).

Этот способ проецирования называется также *цилиндрическим,* так как проецирующие прямые, проведенные через

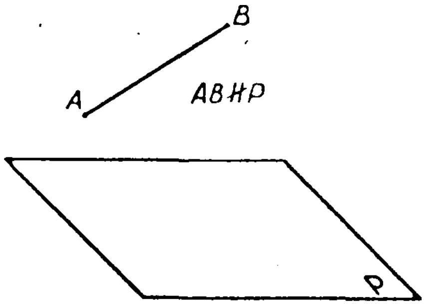


Рис. 7.

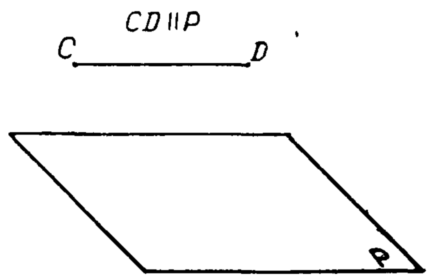


Рис. 8.

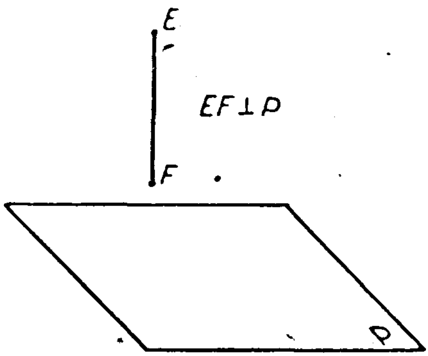


Рис. 9.

точки некоторой линии, образуют цилиндрическую поверхность.

Если проецирующие лучи будут проходить перпендикулярно к плоскости проекций (рис. 6), то такой способ проецирования будет называться *параллельным прямоугольным проецированием* в отличие от предыдущего, у которого проецирующие лучи направлены под острым углом к плоскости проекций и который называется *косоугольным параллельным проецированием.*

Так как в данном курсе рассматривается преимущественно прямоугольное параллельное проецирование, то в дальнейшем, для сокращения, будем называть его просто прямоугольным, опуская слово «параллельное». Слово прямоугольный часто заменяют словом *ортогональный*, образованным из слов древнегреческого языка, обозначающих «прямой» и «угол».

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела.

Студентам предлагается способом ортогонального проецирования построить проекции трех отрезков прямой линии (рис. 7, 8, 9).

§ 3. Свойства параллельных проекций

1) Каждая точка и линия в пространстве имеют на плоскости проекций единственную свою проекцию, так как из одной точки на плоскость можно опустить только один перпендикуляр.

2) Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией бесконечного множества точек в пространстве (рис. 10), каждая линия на плоскости проекций может быть проекцией бесконечного множества линий в пространстве (рис. 11). Иными словами, можно сказать, что одна проекция точки или линии на плоскости проекций не дает еще точного представления о положении точки и линии в пространстве. На рис. 10 точка a служит проекцией не только точки A, но и точек A_1, A_2, A_n, расположенных на одной проецирующей прямой.

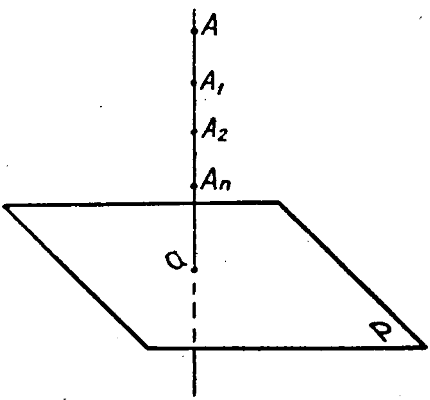


Рис. 10.

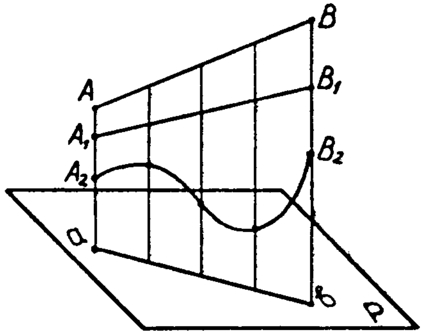


Рис. 11.

3) Для построения проекций некоторой прямой достаточно спроецировать две любые ее точки и через полученные проекции этих точек провести прямую линию (рис. 12).

4) Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 13).

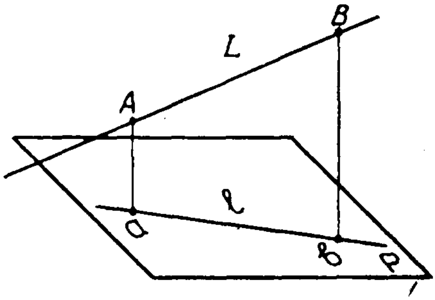


Рис. 12.

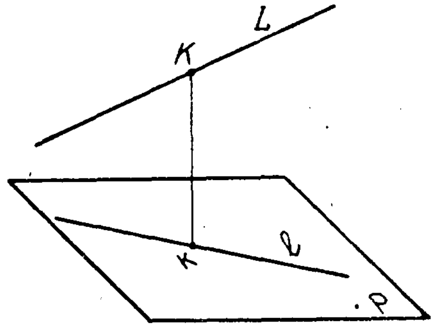


Рис. 13.

5) Если прямая параллельна направлению проецирования, то проекцией прямой будет точка (рис. 14). Точки A и B находятся на одной проецирующей прямой и их проекции на плоскости P совпадут.

6) Прямая линия может быть проекцией не только прямой, но и любой кривой линии, если она расположена в проецирующей плоскости (рис. 15).

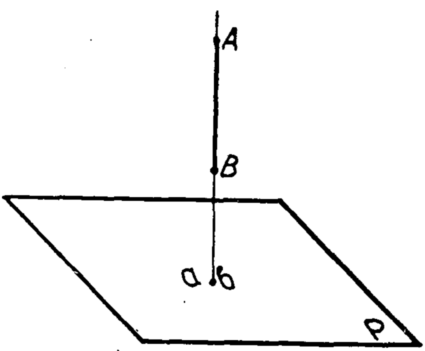


Рис. 14.

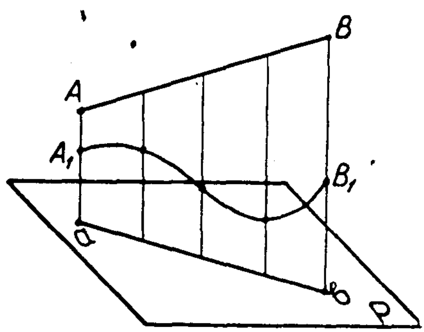


Рис. 15.

7) Отрезок прямой линии, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину. (На рис. 16 $AB=ab$, как отрезки параллельных между параллельными).

8) Отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций (рис. 17). Доказательство:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb}; \text{ т. к. } Aa \parallel Kk \parallel Bb;$$

9) Если прямые в пространстве параллельны между собой, то и их проекции на плоскости будут параллельны

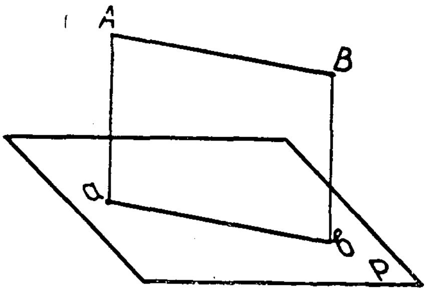


Рис. 16.

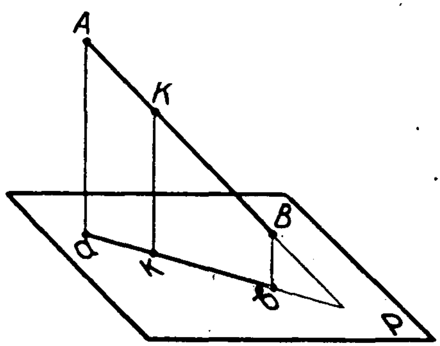


Рис. 17.

(рис. 18). Если $L_1 \parallel L_2$, то $Q \parallel R$ и при пересечении с плоскостью проекций P получаются параллельные между собой l_1 и l_2, т. к. две параллельные плоскости пересекаются с третьей по параллельным прямым.

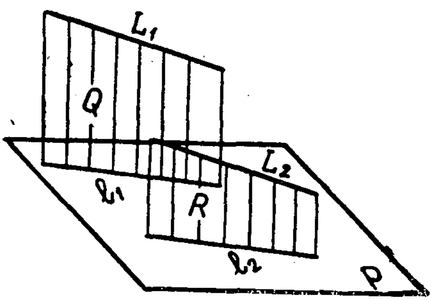


Рис. 18.

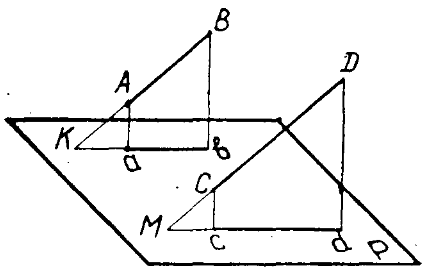


Рис. 19.

10) Отношение отрезков двух параллельных прямых равно отношению проекций этих отрезков (рис. 19). Если $AB \parallel CD$, то треугольники BKb и DMd подобны, откуда

$$\frac{KB}{Kb} = \frac{MD}{Md},$$

но из восьмого свойства параллельных проекций (рис. 17) получим:

$$\frac{KB}{Kb}=\frac{AB}{ab}; \quad \text{и} \quad \frac{MD}{Md}=\frac{CD}{cd}.$$

Подставляя полученные значения в первоначальное равенство, получим:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{CD}{cd}$$

или, сделав перестановку, окончательно получим:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}.$$

В дальнейшем эти свойства будут иметь большое значение. В начертательной геометрии используется метод проекций, т. е. мы будем рассматривать не сами предметы, а их проекции на плоскости и поэтому нам необходимо знать соотношения между предметами и их проекциями, чтобы по проекциям можно было решать пространственные задачи.

Глава II

ТОЧКА

§ 4. Проекции точки

На рис. 20 изображена расположенная в пространстве точка A и на плоскости P найдена ее проекция. Как видно из рисунка, эта проекция еще не вполне определяет положение точки A в пространстве, так как точки A_1 и A_2, расположенные выше и ниже точки A на одной проецирующей прямой, также спроецируются в эту точку на плоскости P.

Чтобы положение точки в пространстве было определенным, необходимо еще знать, на каком расстоянии от плоскости проекций она находится. Поэтому введем еще одну плоскость проекций V и расположим ее перпендикулярно к плоскости проекций H (рис. 21).

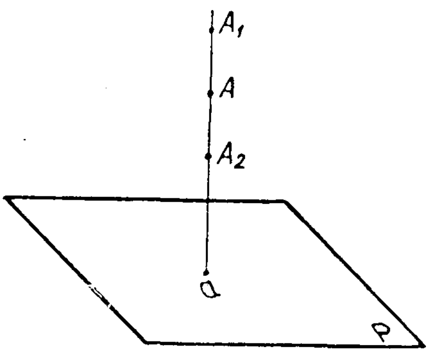


Рис. 20.

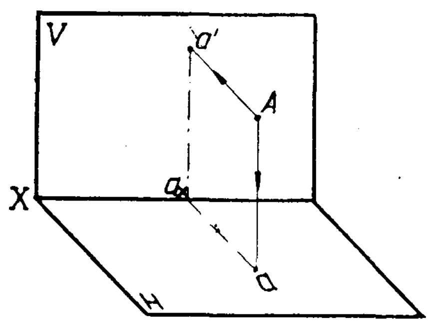


Рис. 21.

Найдем проекцию точки A на новой плоскости проекций. Для этого из точки A опустим перпендикуляр на эту плоскость и найдем точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью. Точка a' называется *фронтальной* проекцией точки A, в отличие от a, которая называется *горизонтальной* проекцией точки A. Плоскость V считают расположенной вертикально и называют *фронтальной плоскостью* проекций, плоскость H расположена горизонтально и ее называют *горизонтальной плоскостью проекций.* Плоскости проекций V и H образуют систему двух плоскостей проекций $\frac{V}{H}$. Линия, по которой пересекаются плоскости V и H, обозначается X и называется *осью проекций* X. Проецирующие прямые Aa и Aa' определяют плоскость, перпендикулярную к плоскостям проекций и к линии их пересечения — оси проекций X. В пересечении с V и H эта плоскость образует две взаимно перпендикулярные

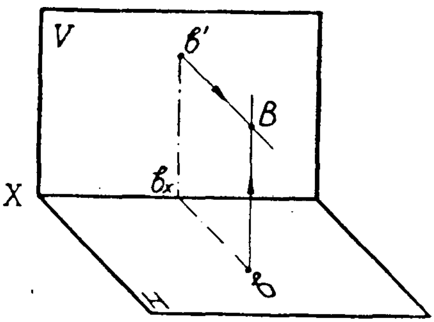


Рис. 22.

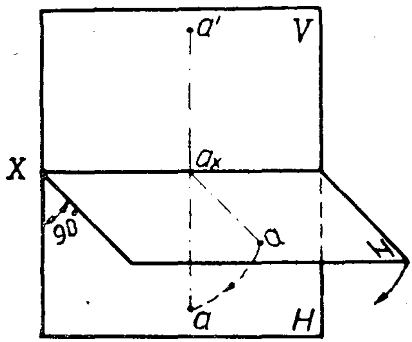


Рис. 23.

прямые $a'a_x$ и aa_x, пересекающиеся в точке a_x на оси проекций. Следовательно, *проекции некоторой точки получаются расположенными на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке.*

Если будут заданы проекции некоторой точки B (рис. 22), то по этим проекциям легко построить и саму точку. Для этого через проекцию b' проведем перпендикуляр к плоскости V, а через проекцию b — перпендикуляр к плоскости H. Пересечение этих перпендикуляров определит положение точки B в пространстве.

Следовательно, две проекции точки вполне определяют положение точки в пространстве относительно данной системы плоскостей проекций.

Но такое объемное изображение проекций на практике неудобно для решения метрических задач*, поэтому перейдем

* Задачи метрические, ведущие к определению истинных величин тех или иных элементов заданных геометрических образов.

Задачи *позиционные,* — исследующие взаимные отношения участвующих в них геометрических объектов пространства. Задачи *комплексные,*—

к плоскому изображению проекций. Для этого (рис. 23) повернем плоскость H вокруг оси X на угол 90° до совмещения ее с плоскостью V. Вместе с плоскостью H повернется на 90° горизонтальная проекция a и после поворота она окажется расположенной на одном перпендикуляре к оси X с фронтальной проекцией a'.

На рис. 24 показано положение проекций после поворота плоскости H.

Уберем границы плоскостей V и H (т. к. плоскости не имеют границ и их мы применяли только для наглядности изображения), запомним также, что выше оси проекций X расположена фронтальная плоскость проекций V, а ниже оси X — горизонтальная плоскость проекций H, окончательно получим изображение (рис. 25), состоящее из оси проекций X и двух

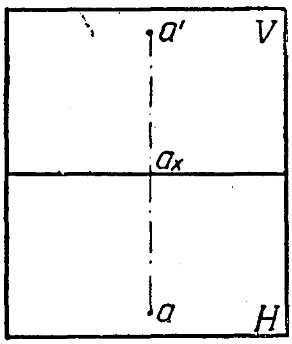


Рис. 24.

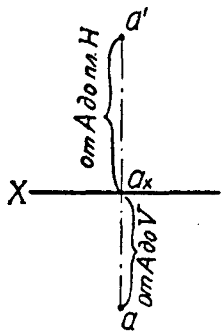


Рис. 25.

проекций точки a и a'. Это изображение называется *эпюр*, что в переводе с французского языка на русский означает *чертеж*. В дальнейшем такие изображения будем называть *чертежами*. (В некоторых учебниках до сих пор их называют эпюрами).

Перейдя к плоскому чертежу, мы утратили пространственную картину расположения плоскостей проекций и точки. Чтобы по чертежу воссоздать пространственную картину, требуется небольшая работа воображения: надо мысленно повернуть обратно плоскость H в первоначальное положение, как это изображено на рис. 22, и мысленно восставить перпендикуляры к плоскостям H и V в проекциях a и a'; в пересечении этих перпендикуляров и будет находиться искомая точка.

С другой стороны, перейдя к чертежу, мы получаем выигрыш в простоте изображения проекций и, кроме того, рассто-

рассматривающие совместно в различных комбинациях позиционные и метрические свойства изучаемых объектов (последние задачи составляют абсолютное большинство).

яния от проекций до оси X будут выражать натуральную величину расстояний до соответствующих плоскостей проекций. Так, отрезок $a'a_x$ (рис. 25) выражает расстояние точки A от плоскости проекций H, а отрезок aa_x— расстояние точки A от плоскости проекций V (см. также рис. 21).

По чертежу можно легко определить расстояние точки A от оси проекций. Оно выражается гипотенузой Aa_x треугольника, построенного по катетам $a'a_x$ и aa_x (рис. 26). Откладывая на чертеже отрезок $a'1$, равный aa_x, перпендикулярно к $a'a_x$, получим гипотенузу a_x1, равную Aa_x.

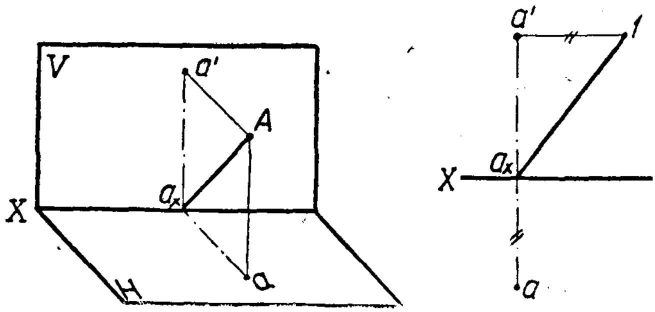


Рис. 26.

Следует обратить внимание на необходимость проведения линии, соединяющей проекции a' и a. Эта линия называется *линией связи;* только при наличии этой линии устанавливается взаимосвязь между проекциями и, следовательно, по ним определяется точка A. *Линия связи соединяет разноименные проекции точки* (в данном случае фронтальную и горизонтальную) *и всегда проходит перпендикулярно к оси проекций.* На чертеже можно проводить ее сплошной тонкой, штриховой или штрих-пунктирной линиями.

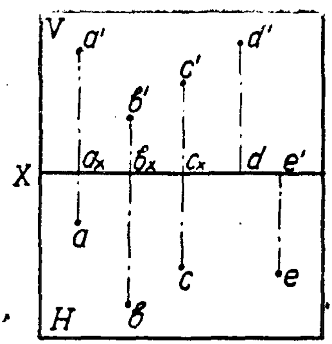


Рис. 27.

Студентам рекомендуется для развития пространственного воображения сделать макет системы двух плоскостей проекций. Сделать его очень просто. Надо взять лист бумаги (лучше плотной — для большей жесткости системы), примерно посредине провести ось X и согнуть по этой оси лист под углом 90°. Макет готов. Развернув лист, получим чертеж (эпюр), на котором надо нанести проекции нескольких точек, как показано на рис. 27.

Попробуйте вначале по плоскому чертежу представить пространственное положение точек, изображенных на чертеже своими проекциями. Если сразу это не удастся, согните лист по оси X под углом 90° и из соответствующих проекций восставьте перпендикуляры к плоскостям H и V; таким образом найдете точки в пространстве. Для большей наглядности в качестве перпендикуляров можно использовать прямую тонкую проволоку или же карандаш.

По проекциям, изображенным на рис. 27, можно представить точки, расположенные в пространстве. Так, точка A расположена от плоскости проекций H примерно в три раза дальше, чем от плоскости проекций V; точка B от плоскости проекций V находится примерно в два раза дальше, чем от плоскости проекций H; точка C находится на одинаковом расстоянии от обеих плоскостей проекций; точка D лежит в плоскости проекций V, поэтому ее горизонтальная проекция будет находиться на оси X; и, наконец, точка E расположена на плоскости проекций H, ее фронтальная проекция будет лежать на оси X.

Студентам предлагается также решить обратные задачи: на макете найти проекции ряда точек, расположенных в пространстве (точки выбирайте произвольно).

Эти занятия с макетом очень важны для развития пространственного воображения, так как в дальнейшем студент будет иметь дело с плоскими чертежами, по которым он должен ясно представлять объемное изображение предметов, выраженных их проекциями.

§ 5. Чертеж точки в системе трех плоскостей проекций

Как уже сказано, две проекции определяют положение точки в пространстве. Однако в некоторых случаях, о чем будет сказано позже, возникает необходимость в третьей проекции, а в практике изображения машин и их частей на чертежах приходится прибегать к еще большему числу проекций, чтобы достаточно ясно представить себе изображаемый объект.

Введем еще одну плоскость проекций, которую поставим перпендикулярно к уже известным нам плоскостям проекций H и V (рис. 28). Эту плоскость называют *профильной плоскостью проекций* и обозначают буквой W.

Три плоскости H, V и W образуют систему трех плоскостей проекций. Линия, по которой пересекаются плоскости H и W, обозначается буквой Y и называется *осью проекций Y*; *ось проекций Z* получается при пересечении плоскостей V и

W. Точка пересечения осей проекций обозначается буквой O. Эта точка одновременно есть проекция оси X на плоскости W, проекция оси Y на плоскости V и проекция оси Z на плоскости H.

Для получения плоского чертежа надо все три плоскости совместить в одну плоскость. Для этого плоскость H поворачиваем, как было сказано раньше, вокруг оси X вниз на угол 90°, а плоскость W — вправо вокруг оси Z также на угол 90° до совмещения с плоскостью V (рис. 29). После совмещения плоскостей получим изображенный на рис. 30 чертеж системы трех плоскостей проекций; он отличается от уже известного нам чертежа системы двух плоскостей проекций только наличием еще двух осей проекций Y и Z.

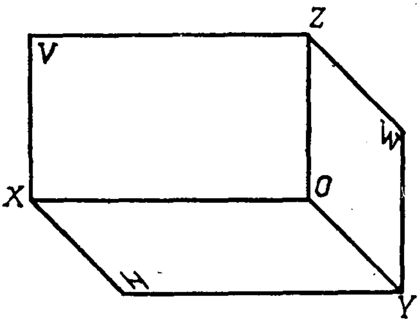


Рис. 28.

На рис. 31 показано определение проекций некоторой точки A на всех трех плоскостях проекций. О нахождении проекций a и a' было сказано раньше. Для определения профильной проекции точки a'' проведем проецирующую прямую на плоскость W и в пересечении с плоскостью проекций W определим третью проекцию точки.

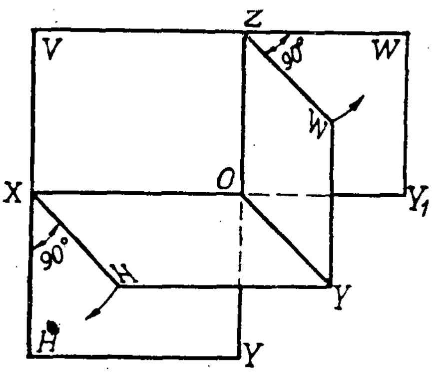


Рис. 29.

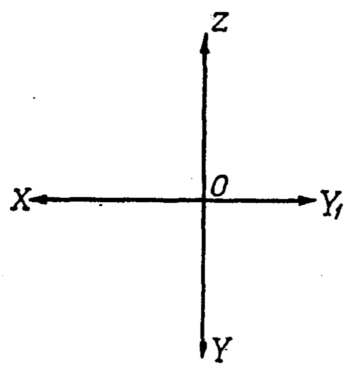


Рис. 30.

При переходе к плоскому чертежу поворачиваем плоскости проекций H и W до совмещения с плоскостью V. Вместе с поворачиваемыми плоскостями будут перемещаться и расположенные на них проекции точки, как это показано на рис. 32.

После совмещения плоскостей получим изображенный на рис. 33 чертеж точки A в системе трех плоскостей проекций.

Надо обратить внимание, что проекции a' и a'' лежат на одной прямой, перпендикулярной к оси проекций Z. Эта прямая $a'a''$ также будет являться *линией связи* и проведение ее на чертеже обязательно.

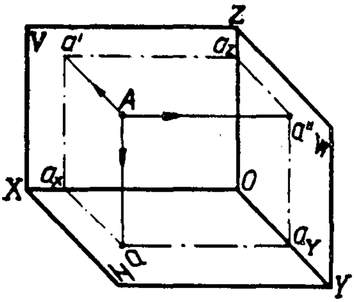


Рис. 31.

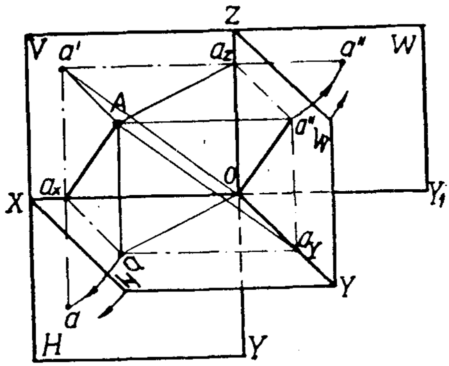


Рис. 32.

По полученному чертежу точки (рис. 33) легко определить положение точки A в пространстве относительно выбранной системы плоскостей проекций. Так, отрезок $a'a_x$ определит расстояние от точки A, расположенной в пространстве, до плоскости проекций H (см. также рис. 32). Это — истин-

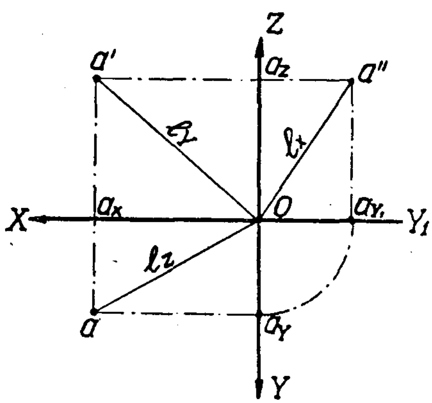


Рис. 33.

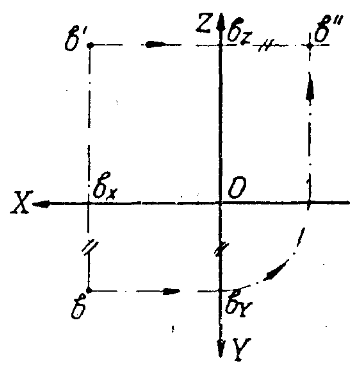


Рис. 34.

ная величина расстояния с учетом масштаба чертежа. Соответственно, отрезок aa_x определит расстояние от точки A до плоскости проекций V, а отрезок $a'a_Z = aa_Y$ — расстояние от точки A до профильной плоскости проекций W.

Непосредственно по чертежу можно также определить расстояния от точки в пространстве до осей проекций. На чертеже (рис. 33) отрезок $a''O$ определит расстояние от точки A до оси X, обозначенное через l_x (см. также рис. 32); отрезок $a'O$ — расстояние от точки A до оси Y — l_Y; отрезок aO — расстояние от точки A до оси Z — l_z.

При необходимости легко перейти от системы двух плоскостей проекций к системе трех плоскостей проекций, т. е. если заданы две проекции точки, то третью проекцию точки построить просто. Построение показано на рис. 34. В данном примере заданы горизонтальная b и фронтальная b' проекции точки B. Произвольно выбираем ось проекций Z, затем через точку b' проводим линию связи перпендикулярно к оси OZ и на ней откладываем отрезок $b_zb''=bb_x$.

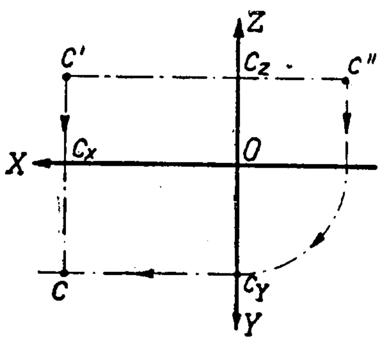


Рис. 35.

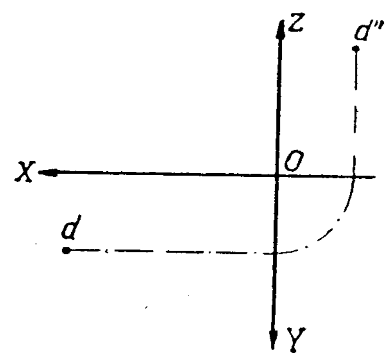


Рис. 36.

На рис. 35 по заданным проекциям c' и c'' построена проекция c (ход построения показан стрелками).

Студентам рекомендуется решить самостоятельно подобную задачу, изображенную на рис. 36. По заданным проекциям d и d'' построить фронтальную проекцию d'.

§ 6. Ортогональные проекции и система прямоугольных координат

Определение положения точки в пространстве при помощи ее ортогональных проекций подобно определению положения точки при помощи ее *прямоугольных координат*, т. е. чисел, выражающих расстояние этой точки от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, которые называются *плоскостями координат*.

Прямые, по которым пересекаются плоскости координат, называются *осями координат,* они обозначаются буквами *X, Y, Z*. Точка пересечения осей координат называется *началом координат* и обозначается буквой *O*.

На рис. 37 координата x некоторой точки A — это отрезок Aa'', взятый в определенном масштабе. Этот отрезок показывает расстояние от точки A до плоскости координат W. Эта координата называется *абсциссой.* Как видно из рис. 37: $Aa''=aa_Y=a'a_z=a_xO$. Иначе можно сказать, что координата x точки A будет выражать на чертеже расстояние от начала координат O, откладываемое вдоль оси X.

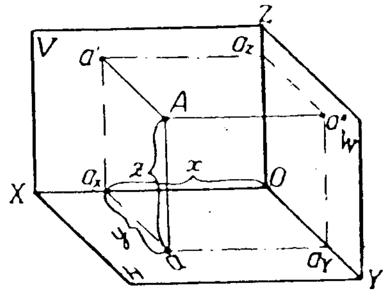


Рис. 37.

Соответственно, координата y точки A будет отрезок Aa', взятый в определенном масштабе. Эта координата называется *ординатой* точки, которая определяет расстояние от точки A до плоскости координат V. Отметим, что $Aa'=a''a_z=a_YO$. На чертеже ордината будет показывать расстояние от начала координат O, откладываемое вдоль оси Y.

Третья координата точки A, называется *аппликатой,* на чертеже выражается отрезком Aa, показывающим расстояние от точки A до плоскости координат H. $Aa=a'a_x=a''a_Y=a_zO$. На чертеже аппликата — это расстояние от начала координат O, откладываемое вдоль оси Z.

Итак, точку в пространстве можно выразить через ее координаты. Например, запись $A(7, 3, 5)$ можно расшифровать следующим образом: точка A, расположенная в пространстве, находится на расстоянии от плоскости W — 7 единиц, от плоскости V — 3 единицы и от плоскости H — 5 единиц; она имеет абсциссу $x=7$, ординату $y=3$ и аппликату $z=5$.

Необходимо обратить внимание, что координаты записываются в строго определенном порядке, а именно: x, y, z. Если точка B имеет координаты $x=4$, $y=6$, $z=5$, то запись будет иметь следующий вид: $B(4, 6, 5)$.

Решим несколько примеров.

Пример 1. По заданным координатам построить наглядное изображение и чертеж точки $A(7, 3, 5)$.

Р е ш е н и е (рис. 38). Построим вначале наглядное изображение этой точки. Примем плоскости проекций H, V и W за плоскости координат. Эти три плоскости образуют координатный угол. Отложим от начала координат вдоль оси X абсциссу точки A ($x=7$), получим на оси X точку a_x; от точки

a_x вдоль оси Y (параллельно ей) отложим ординату ($y=3$); получим точку a — это есть горизонтальная проекция точки A. Следовательно, горизонтальная проекция точки находится по двум координатам x и y.

Для нахождения самой точки A надо от полученной точки a вдоль оси Z отложить аппликату точки A ($z=5$). Как видно из рис. 38, фронтальную проекцию точки a' надо находить по координатам x и z.

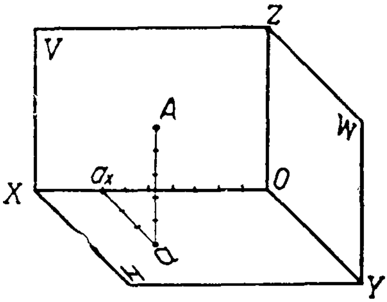


Рис. 38.

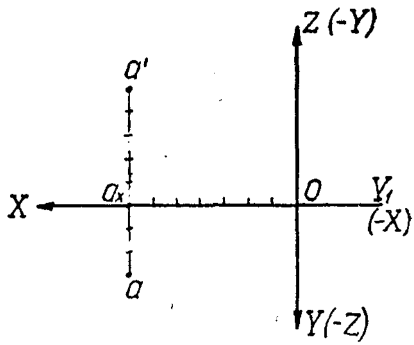


Рис. 39.

Совершенно необязательно построение точки надо начинать с координаты x.

Построение чертежа точки A по ее координатам показано на рис. 39. В данном случае условимся положительные на-

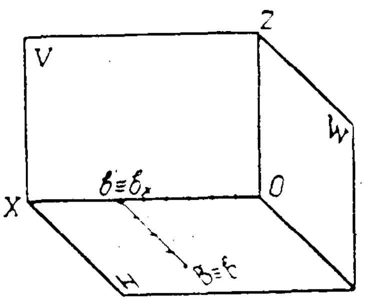


Рис. 40.

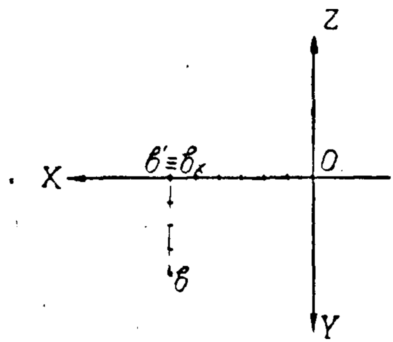


Рис. 41.

правления осей проекций считать от начала координат для оси X — влево, оси Y — вниз и оси Z — вверх. От начала координат по оси X влево отложим координату x точки A, равную 7 единицам: получим точку a_x; от полученной точки вниз, параллельно оси Y, откладываем координату y точки A, равную 3 единицам: получим горизонтальную проекцию точки a.

Для построения фронтальной проекции точки A от a_x вверх, параллельно оси Z, отложим координату z точки A, равную 5 единицам.

Профильная проекция точки строится как было указано в § 5.

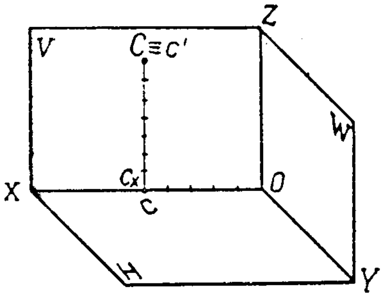


Рис. 42.

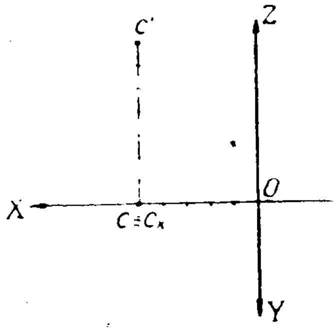


Рис. 43.

Пример 2. По заданным координатам построить наглядное изображение и чертеж точки B (6, 4, 0).

Решение. Построение наглядного изображения точки B показано на рис. 40, чертежа точки — на рис. 41.

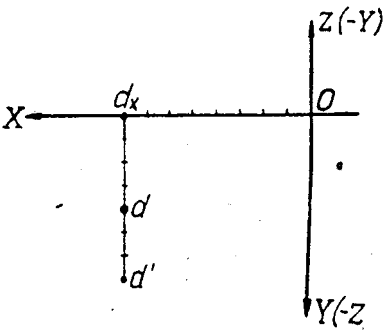


Рис. 44.

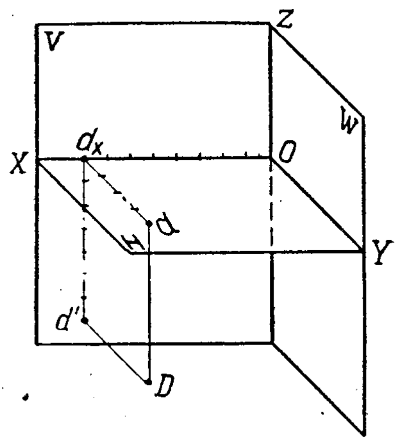


Рис. 45.

Как видно из рис. 40 и 41, точка B лежит в плоскости H, ее горизонтальная проекция совпадает с самой точкой, а фронтальная проекция будет находиться на оси X.

Пример 3. По заданным координатам построить наглядное изображение и чертеж точки C (5, 0, 7).

Решение. Построение показано на рис. 42 и 43.

Точка C лежит в плоскости V, ее фронтальная проекция совпадает с самой точкой, а горизонтальная проекция будет находиться на оси X.

Пример 4. Построить чертеж и наглядное изображение точки D, имеющей координаты: (8, 4, —7).

Решение. На рис. 44 показано построение чертежа точки D. На чертеже обе проекции оказались ниже оси X. Это необычное положение проекций объясняется положением точки в пространстве, которое показано наглядно на рис. 45.

Как видно из рис. 45, точка D находится ниже плоскости проекций H.

О различном положении точек относительно плоскостей проекций и будет рассказано ниже.

§ 7. Чертежи точек, расположенных в различных четвертях и октантах пространства

Плоскости проекций при своем пересечении образуют четыре двугранных угла, называемых *четвертями пространства* (рис. 46).

Ось проекций X делит каждую из плоскостей H и V на полуплоскости, условно обозначенные H и H_1, V и V_1.

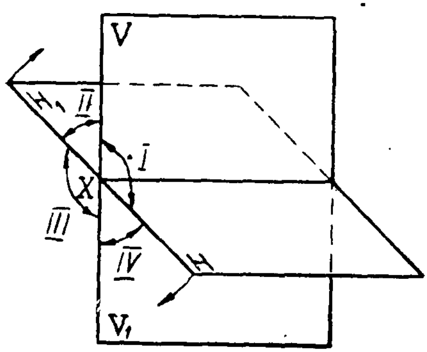


Рис. 46.

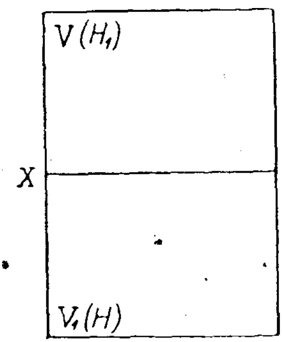


Рис. 47.

Первая четверть занимает пространство над полуплоскостью H и перед полуплоскостью V; вторая четверть находится за полуплоскостью V и над полуплоскостью H_1; третья четверть находится за полуплоскостью V_1 и под полуплоскостью H_1 и, наконец, четвертая четверть расположена под полуплоскостью H и перед полуплоскостью V_1.

Для перехода к плоскому чертежу надо повернуть полуплоскость H вокруг оси X вниз на 90° до совмещения ее с полуплоскостью V_1, тогда полуплоскость H_1 будет перемещаться вверх и после поворота совместится с полуплоскостью V.

Проекции точек, находящиеся на этих полуплоскостях, также будут перемещаться вместе с ними до совмещения с полуплоскостями V и V_1.

После совмещения плоскостей видим (рис. 47), что выше оси X будут находиться полуплоскость V и совмещенная с ней полуплоскость H_1, ниже оси X — полуплоскость V_1 и совмещенная с ней полуплоскость H.

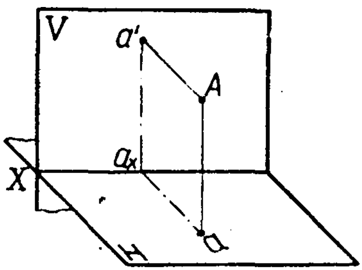


Рис. 48.

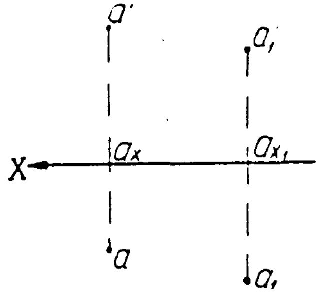


Рис. 49.

В дальнейшем за основу для построения чертежа будем брать только ось проекций X, запомнив положение полуплоскостей.

Необходимо научиться узнавать, в какой из четвертей пространства будет находиться та или иная точка по положению их проекций на чертеже.

Рассмотрим все возможные случаи расположения точек в пространстве и построим чертежи этих точек.

Первая четверть. На рис. 48 показана точка A, расположенная в первой четверти, и найдены ее проекции.

При переходе к чертежу поворачиваем плоскость проекций H вниз на 90°. Вместе с плоскостью H вниз переместится и горизонтальная проекция a; после поворота она окажется ниже оси X.

На рис. 49 показан чертеж точки A, расположенной в первой четверти. На этом же рис. 49 показаны проекции точки A_1, расположенной в первой четверти, на одинаковых расстояниях от плоскостей проекций H и V.

Вторая четверть. На рис. 50 показана точка B, расположенная во второй четверти.

При переходе к чертежу плоскость H_1 поворачиваем вокруг оси X вверх до совмещения с плоскостью V (плоскость H

при этом перемещается вниз), горизонтальная проекция b также будет перемещаться вверх и после поворота она окажется выше оси X. На рис. 50 поворот показан стрелкой.

На рис. 51 показан чертеж точки B, расположенной во второй четверти. Как видно из чертежа, обе проекции находятся выше оси X.

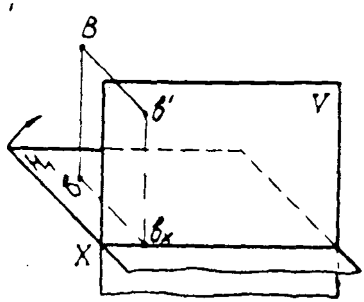


Рис. 50.

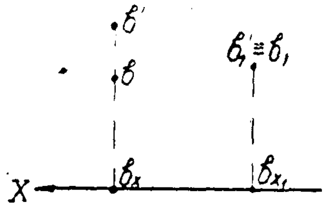


Рис. 51.

Точка B_1, изображенная на рис. 51, находится также во второй четверти на одинаковом расстоянии от плоскостей H_1 и V, на чертеже ее проекции слились в одну точку.

Третья четверть. На рис. 52 показана третья четверть с расположенной в ней точкой C и найдены проекции этой точки.

Стрелкой показано перемещение горизонтальной проекции C при переходе к чертежу.

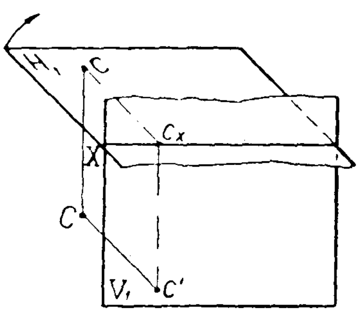


Рис. 52.

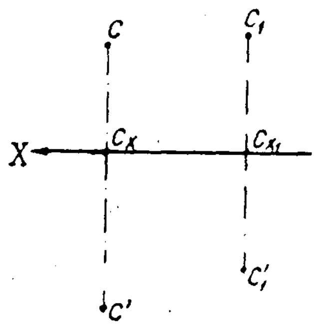


Рис. 53.

На рис. 53 показан чертеж точки C, расположенной в третьей четверти.

Точка C_1, изображенная на чертеже своими проекциями (рис. 53), находится в третьей четверти и одинаково удалена от плоскостей H_1 и V_1. Как видно из рис. 53, горизонтальная проекция точки находится выше оси X, а фронтальная проекция точки — ниже оси X. Получается как бы обратная картина первой четверти. Сравните с рис. 49.

Четвертая четверть. На рис. 54 показана точка D, расположенная в четвертой четверти, и на рис. 55 — чертеж этой точки.

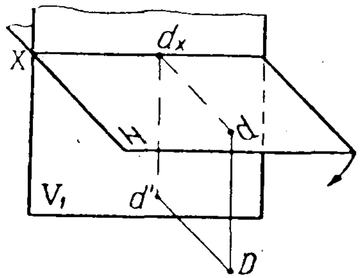


Рис. 54.

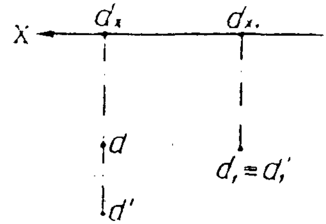


Рис. 55.

Как видно из рис. 55, обе проекции точки D оказались расположенными ниже оси X. (Обратная картина точек, расположенных во второй четверти; сравните с рис. 51). На рис. 55 показаны также проекции точки D_1, расположенной в четвертой четверти, на одинаковом расстоянии от плоскостей H и V_1; на чертеже проекции слились в одну точку.

На рис. 56 показаны точки E и F, расположенные на плоскостях H и H_1, их горизонтальные проекции будут совпадать с самими точками, а фронтальные проекции будут находиться на оси X. На рис. 57 показан чертеж этих точек.

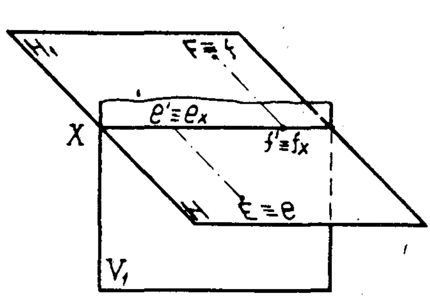


Рис. 56.

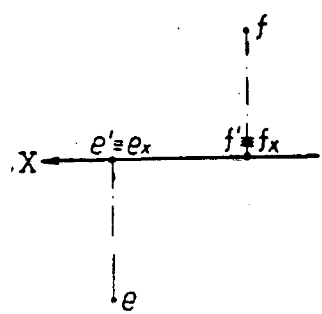


Рис. 57.

На рис. 58 показаны точки M и N, расположенные на плоскостях V и V_1, их фронтальные проекции будут совпадать с самими точками, а горизонтальные проекции будут находиться на оси X. На рис. 59 показан чертеж этих точек.

На рис. 60 показан чертеж точки P, лежащей на оси X.

Необходимо отметить, что этот раздел «Расположение точек в различных четвертях пространства» имеет очень большое значение при дальнейшем изучении курса начертательной

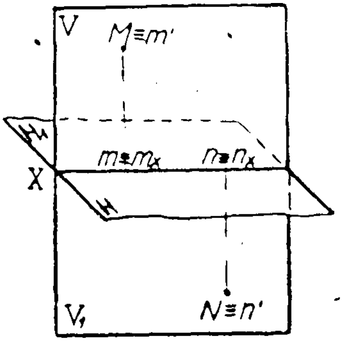


Рис. 58.

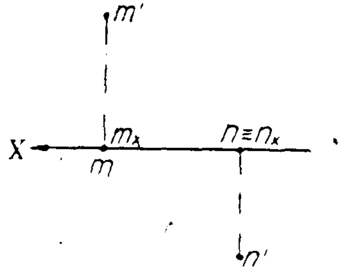


Рис. 59.

геометрии и до тех пор, пока он не будет полностью понят и усвоен, нет смысла переходить к изучению последующих разделов курса.

Понятие об октантах пространства. Если две плоскости проекций H и V пересечь перпендикулярной к ним третьей плоскостью проекций W, т. е. перейти от системы двух плоскостей проекций к системе трех плоскостей проекций, то в пересечении получим восемь трехгранных углов, которые называют *октантами*.

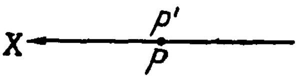


Рис. 60.

На рис. 61 показан порядок нумерации октантов. С первого по четвертый октанты нумеруются как четверти. Симметрично с первым октантом относительно плоскости W расположен пятый октант, симметрично второму расположен шестой октант, симметрично третьему расположен седьмой октант и, наконец, симметрично четвертому октанту расположен восьмой октант.

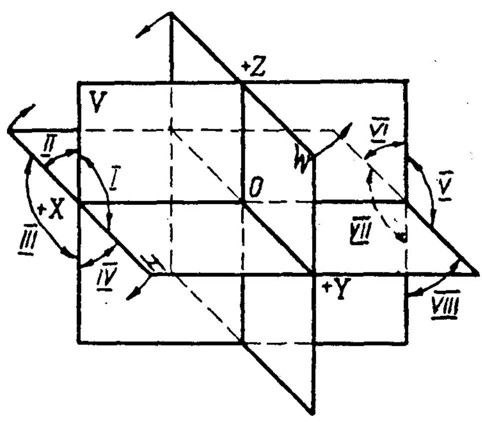


Рис. 61.

Точки могут располагаться в любом из этих октантов. Надо научиться по чертежу определять, в каком из восьми октантов будет расположена та или иная точка. Это сделать нетрудно, если Вы хорошо усвоили положение точек в четвертях пространства.

Если точки расположены в первом — четвертом октантах, то их проекции будут располагаться слева от осей Z и Y (координата x — положительна); если точки расположены в пятом — восьмом октантах, то их проекции будут справа от осей Z и Y (координата x — отрицательна). Здесь надо помнить, что относительно плоскости W будут симметричны октанты: первый и пятый, второй и шестой, третий и седьмой, четвертый и восьмой.

Сравните проекции точки A, расположенной в первом октанте (рис. 62), и проекции точки B, расположенной в пятом октанте (рис. 63).

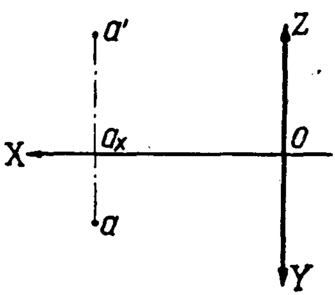


Рис. 62.

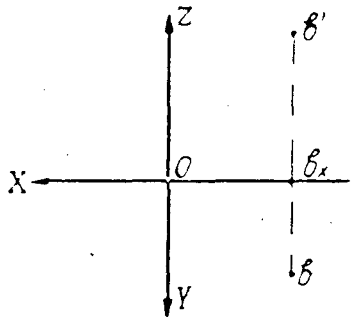


Рис. 63.

На рис. 64 показаны проекции точки C, расположенной в четвертом октанте, а на рис. 65 показаны проекции точки D, расположенной в восьмом октанте.

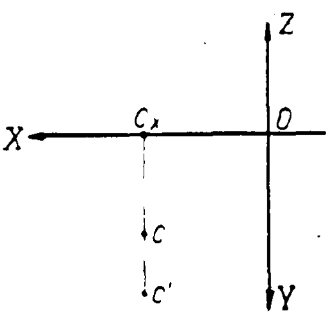


Рис. 64.

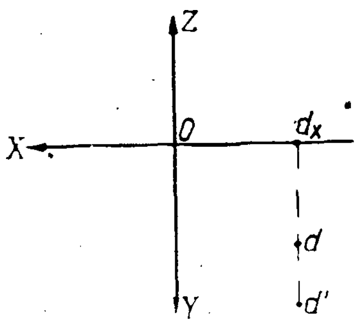


Рис. 65.

Подобная же картина получается при сравнении проекций точек, расположенных во втором и шестом, третьем и седьмом октантах.

Небольшие трудности возникают у студентов при построении профильных проекций этих точек; однако эти трудности легко преодолеть, если усвоить простой прием, который заключается в применении вспомогательной прямой, называемой *постоянной прямой*. Эта прямая (рис. 66) проходит через начало координат под углом 45° к осям X и Z.

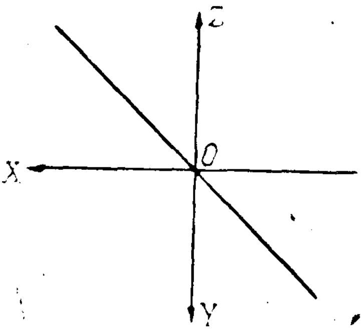


Рис. 66.

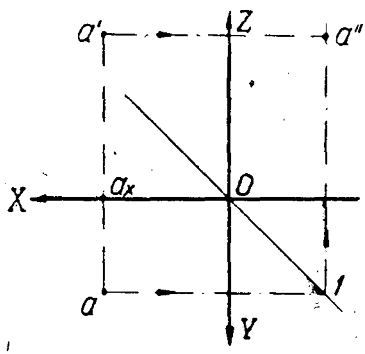


Рис. 67.

Построение профильной проекции точки A, расположенной в первом октанте, показано стрелками на рис. 67. Построение начинаем с проведения из горизонтальной проекции a прямой, перпендикулярной к оси Y. В точке пересечения со вспомогательной прямой восставляем перпендикуляр к оси X и продолжаем его до пересечения с линией связи, проведенной из фронтальной проекции a', перпендикулярно к оси Z. Правильность построения легко проверить следующим образом: на чертеже фронтальная и профильная проекции точек должны лежать на одной линии связи, перпендикулярной к оси Z (положительного или отрицательного направления).

На рис. 68 показано построение профильной проекции точки B, расположенной во втором октанте, на рис. 69 — построение профильной проекции точки C, расположенной в пятом октанте, а на рис. 70 — построение профильной проекции точки D, расположенной в седьмом октанте*.

Студентам рекомендуется самостоятельно построить профильные проекции точек, расположенных в третьем, четвертом, шестом и восьмом октантах.

---

* Профессор Х. А. Арустамов предлагает следующий прием построения профильной проекции точки: из фронтальной проекции точки надо провести линию связи перпендикулярно оси Z и от оси Z отложить расстояние от горизонтальной проекции точки до оси X вправо, если сама точка находится перед плоскостью V (т. е. в первом, четвертом, пятом и восьмом октантах), и влево, если сама точка находится за плоскостью V (т. е. во втором, третьем, шестом и седьмом октантах).

Для закрепления данной темы рекомендуется решить следующие задачи.

1) Построить чертеж точки *А*, находящейся на расстоянии 30 *мм* от горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и лежащей: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти.

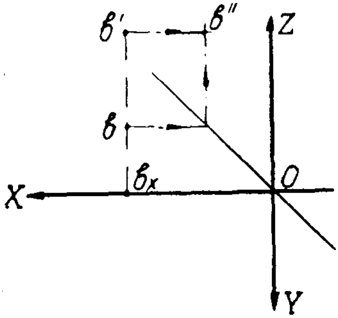


Рис. 68.

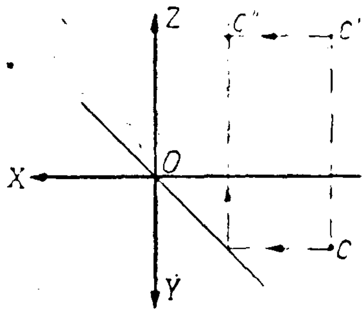


Рис. 69.

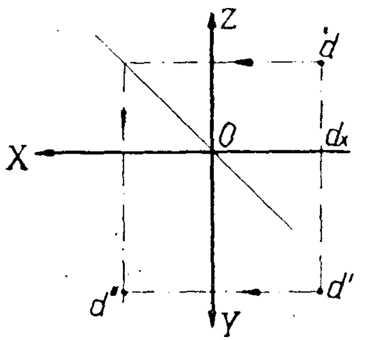


Рис. 70.

2) Дана точка *А* в первой четверти, отстоящая от горизонтальной плоскости проекций на расстоянии 20 *мм* и от фронтальной — на расстоянии 30 *мм*. Построить чертежи для точек, расположенных симметрично данной относительно: а) фронтальной плоскости; б) оси *X*.

3) Построить три проекции каждой из точек по данным координатам: *A* (—20, 15, —18); *B* (15, —15, —18); *C* (20, 15, —20); *D* (—15, —10, —20); *E* (15, —20, 25); *F* (20, 15, 10); *M* (—15, 0, 18); *N* (0, —20, —15).

4) Определить расстояния до осей проекций точки, имеющей следующие координаты: $x=y=3$; $z=4$.

Глава 3

ПРЯМАЯ

§ 8. Проекции отрезка прямой линии

Исходя из свойств параллельных проекций, можно сказать: для того, чтобы построить проекции отрезка прямой линии, достаточно найти проекции его концов и затем одноименные проекции соединить между собой. Концы отрезка прямой линии — есть точки, а проекции точек были подробно рассмотрены в предыдущей главе; если она достаточно хорошо усвоена, изучение этой темы не представит больших трудностей.

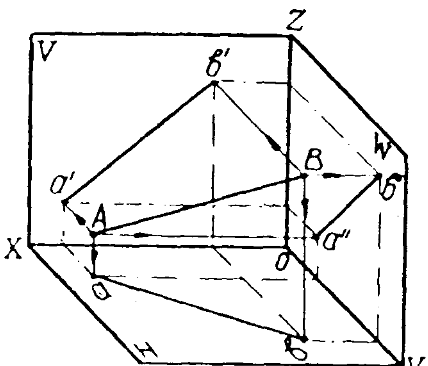


Рис. 71.

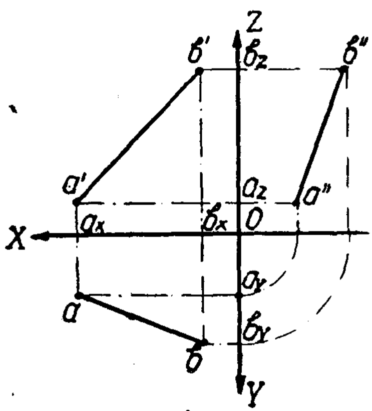


Рис. 72.

На рис. 71 показано нахождение проекций отрезка прямой *AB*, а на рис. 72 дан чертеж этого отрезка в системе трех плоскостей проекций.

Если на чертеже какой-либо отрезок будет задан двумя проекциями, третью проекцию этого отрезка легко определить (см. § 7).

Как видно из рис. 71, прямая AB не параллельна ни одной из плоскостей проекций H, V и W. Такую прямую будем называть *прямой общего положения.* Каждая из проекций этого отрезка меньше самого отрезка: $ab<AB$, $a'b'<AB$, $a''b''<<AB$. Если обозначить углы между прямой и плоскостями проекций через α (с плоскостью H), β (с плоскостью V) и γ (с плоскостью W), получим:

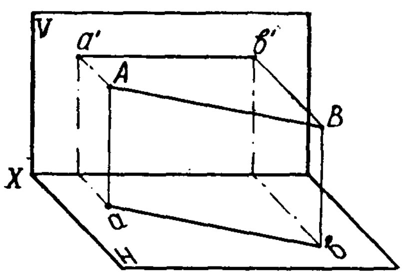
$$ab=AB\cdot\cos\alpha;\quad a'b'=AB\cdot\cos\beta;\quad a''b''=AB\cdot\cos\gamma.$$

Если на чертеже $ab=a'b'=a''b''$, то прямая образует с плоскостями проекций равные между собой углы ($\approx 35°$); при этом каждая из проекций прямой расположена под углом 45° к соответствующим осям проекций.

§ 9. Особые положения прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямая линия может занимать относительно плоскостей проекций различные положения. Рассмотрим особые (частные) положения прямой.

1) Прямая параллельна плоскости H (рис. 73). Такая прямая называется *горизонтальной* прямой, ее фронтальная проекция параллельна оси проекций X, а горизонтальная проекция отрезка этой прямой равна самому отрезку: $ab=AB$. Угол β между горизонтальной проекцией ab и осью X показывает наклон отрезка AB к плоскости проекций V, а угол γ — наклон отрезка AB к плоскости проекций W.



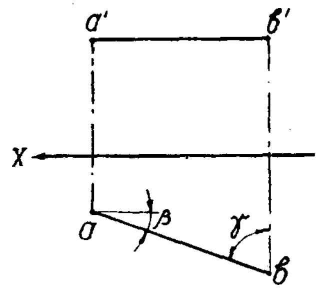


Рис. 73.

2) Прямая параллельна плоскости V (рис. 74). Такая прямая называется *фронтальной* прямой, ее горизонтальная проекция параллельна оси проекций X, а фронтальная проекция отрезка этой прямой равна самому отрезку: $c'd'=CD$. Угол α между фронтальной проекцией $c'd'$ и осью

проекций X — это угол наклона отрезка CD к плоскости проекций H, угол γ показывает наклон отрезка CD к плоскости проекций W.

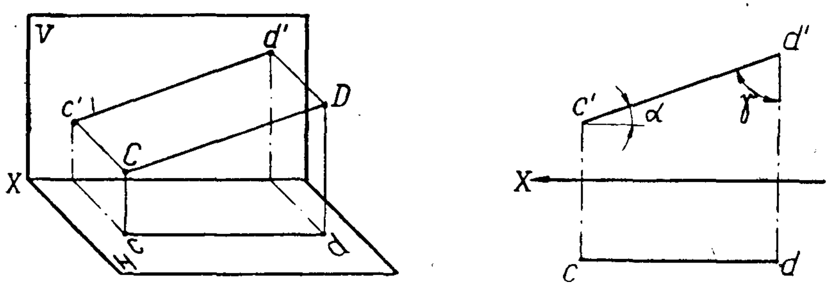


Рис. 74.

3) Прямая параллельна плоскости W (рис. 75). Такая прямая называется *профильной* прямой, ее горизонтальная и фронтальная проекции параллельны, соответствен-

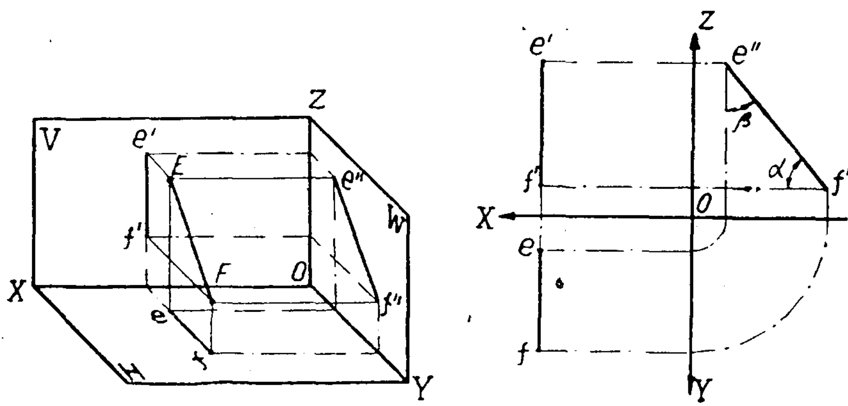


Рис. 75.

но, осям проекций Y и Z, а профильная проекция отрезка этой прямой равна самому отрезку: $e''f''=EF$. На чертеже (рис. 75) угол α — угол наклона отрезка EF к плоскости проекций H, угол β — угол наклона отрезка EF к плоскости проекций V.

4) Прямая, перпендикулярная к плоскости H, т. е. параллельная плоскостям V и W (рис. 76). Такую прямую будем называть *горизонтально-проецирующей* прямой, на плоскость проекций H она спроецируется в точку, на фронтальную и профильную плоскости проекций спроецируется в

виде прямых, параллельных оси проекций Z, и каждая из этих проекций будет равна самому отрезку: $a'b'=a''b''=AB$.

5) П р я м а я, п е р п е н д и к у л я р н а я к п л о с к о с т и V, т. е. параллельная плоскостям H и W (рис. 77). Такую прямую будем называть *фронтально-проецирующей* прямой, на плоскость проекций V она спроецируется в точку, на плоскости H и W — в виде прямых, параллельных оси проекций Y. Горизонтальная и профильная проекции этой прямой будут равны самому отрезку: $cd=c''d''=CD$.

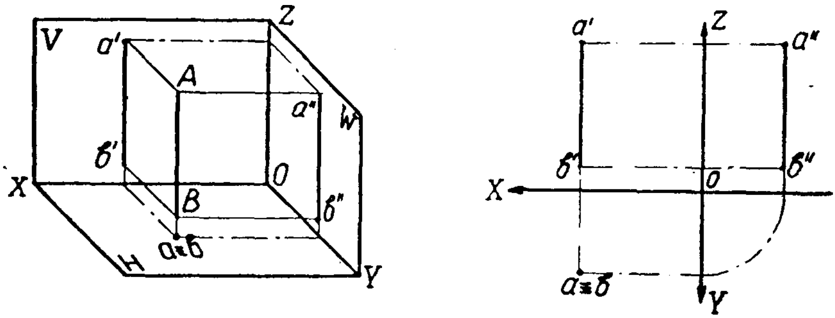


Рис. 76.

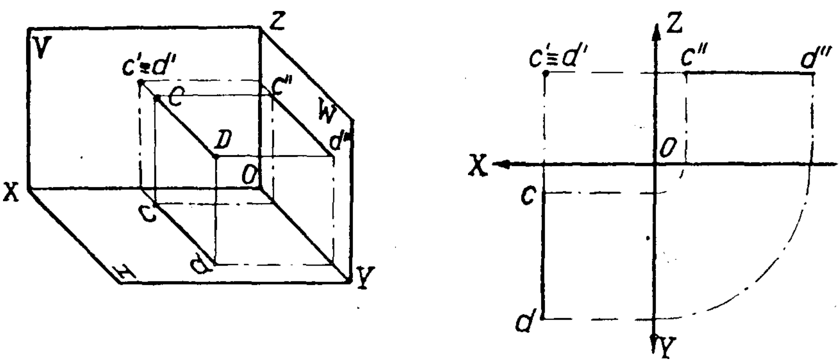


Рис. 77.

6) П р я м а я, п е р п е н д и к у л я р н а я к п л о с к о с т и W, т. е. параллельная плоскостям H и V (рис. 78). Такую прямую будем называть *профильно-проецирующей* прямой, на плоскость проекций W она спроецируется в точку, на плоскости H и V — в виде прямых, параллельных оси проекций X. Горизонтальная и фронтальная проекции этой прямой будут равны самому отрезку: $ef=e'f'=EF$.

7) Прямая расположена в плоскости проекций H (рис. 79). В этом случае горизонтальная проекция отрезка будет совпадать с самим отрезком и, естественно, будет ему равна, фронтальная проекция прямой будет находиться на оси проекций X.

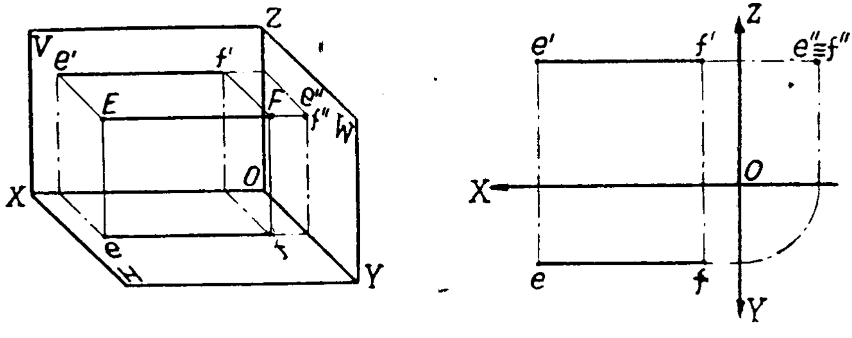


Рис. 78.

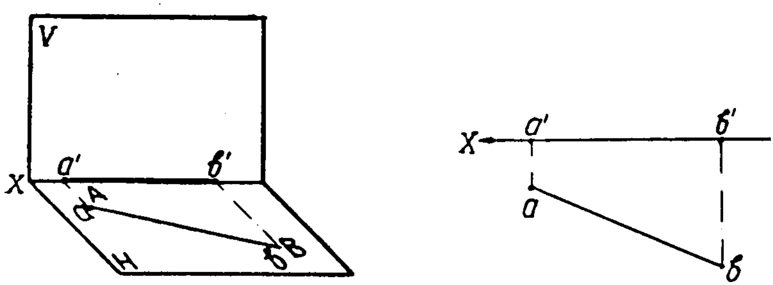


Рис. 79.

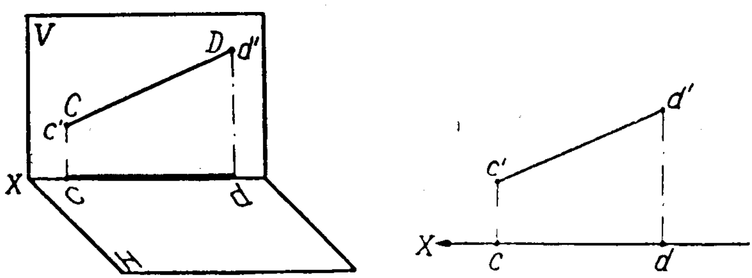


Рис. 80.

8) Прямая расположена в плоскости проекций V (рис. 80). Фронтальная проекция такой прямой совпадает с самим отрезком и будет ему равна, горизонтальная проекция отрезка будет находиться на оси проекций X.

9) Прямая расположена в плоскости проекций W (рис. 81). Профильная проекция такой прямой совпадает с самим отрезком, горизонтальная проекция отрезка будет находиться на оси проекций Y, фронтальная проекция — на оси проекций Z.

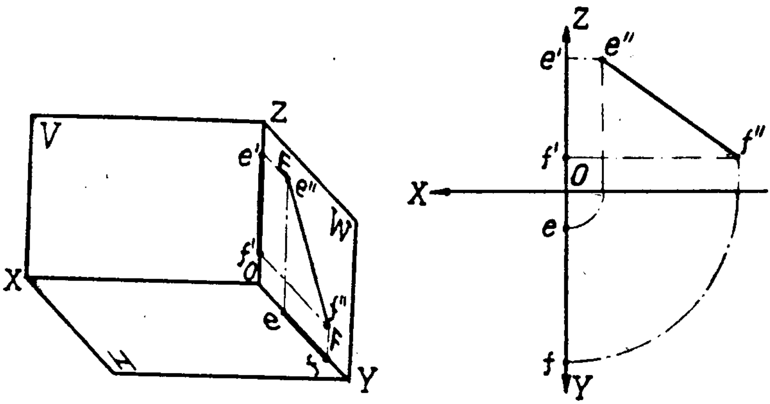


Рис. 81.

10) Прямая, совпадающая с какой-либо из осей проекций (рис. 82). На рис. 82 показан чертеж отрезка прямой линии AB, совпадающей с осью проекций X. Горизонтальная и фронтальная проекции этого отрезка совпадают с осью X, профильная проекция будет находиться в начале координат.

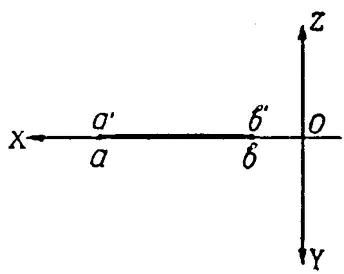


Рис. 82.

Решая задачи на чертеже, никогда не следует забывать о пространственном расположении точек или прямых и, прежде чем выбрать тот или иной вариант задачи, необходимо вначале в уме решить эту задачу в пространстве.

Развитию пространственного мышления в этом случае помогут всевозможные модели и макеты пространственных форм, большинство из которых студент в состоянии изготовить сам.

§ 10. Деление в данном отношении отрезка прямой линии на чертеже

Чтобы разделить на чертеже в данном отношении какой-либо отрезок прямой линии, достаточно в этом же отношении разделить любую из проекций этого отрезка. Это исходит из свойств параллельных проекций (см. главу I), в одном из которых говорится, что отношение отрезков прямой линии, находящейся в пространстве, равно отношению проекций этих отрезков.

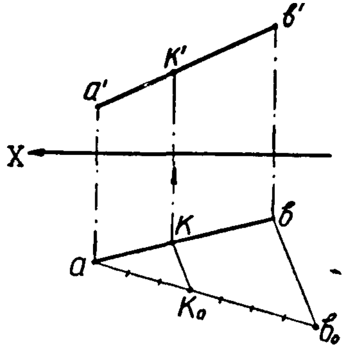


Рис. 83.

На рис. 83 отрезок AB разделен в отношении 3 : 4. Для этого из точки a под произвольным углом к горизонтальной проекции этого отрезка проведена вспомогательная прямая, на которой отложено семь (3+4) произвольных, но равных между собой отрезков. Конечная точка деления b_0 соединена с проекцией b и из точки k_0 проведено $k_0k \| b_0b$. Горизонтальная проекция ab этого отрезка точкой k разделится в отношении 3 : 4. Фронтальную проекцию k' найдем, проведя линию связи.

§ 11. Определение на чертеже натуральной величины отрезка прямой линии общего положения и углов наклона ее к плоскостям проекций

Угол наклона прямой к плоскости проекций определяется как угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Длина отрезка прямой и угол, составленный этой прямой с плоскостью проекций, могут быть определены из прямоугольного треугольника ABC (рис. 84), в котором один катет AC ($AC \|$ пл. H) равен проекции отрезка $AC=ab$, а другой катет $BC=Bb-Aa$ показывает, насколько точка B расположена выше точки A относительно плоскости проекций H, т. е. показывает разность расстояний концов отрезка от плоскости проекций. Эти два катета легко определяются на самом чертеже.

Если координаты, определяющие расстояния концов отрезка от плоскости проекций, имеют разные знаки (рис. 85), то надо иметь в виду разность алгебраическую $B1=Bb-(-Aa)=Bb+Aa$.

Этот метод определения на чертеже длины отрезка прямой линии и ее углов наклона к плоскостям проекций называется *методом прямоугольного треугольника.*

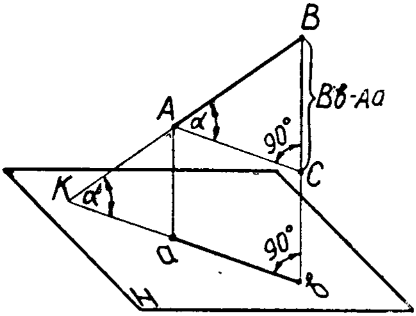


Рис. 84.

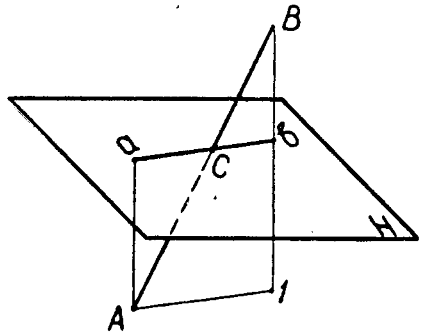


Рис. 85.

Для определения на чертеже длины отрезка прямой линии (рис. 86) из любого конца горизонтальной проекции этого отрезка, например из точки b, проводим прямую, перпендикулярную к этой проекции, и на этой прямой откладываем отрезок $b2 = b'1$, взятый с фронтальной проекции как разность расстояний от проекций b' и a' до оси X. Отрезок $a2$ (с учетом масштаба) будет равен по величине самому отрезку AB, а угол α между $a2$ и горизонтальной проекцией ab будет показывать наклон отрезка AB к плоскости проекций H.

Для определения угла наклона отрезка прямой AB к плоскости проекций V необходимо выполнить подобные построения на фронтальной проекции. На рис. 87 отрезок $b'4$

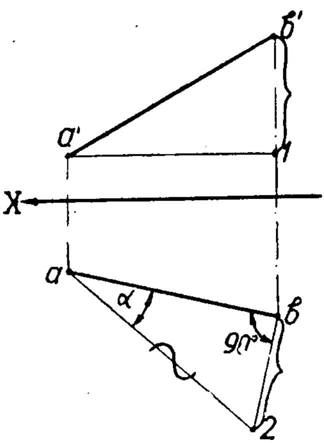


Рис. 86.

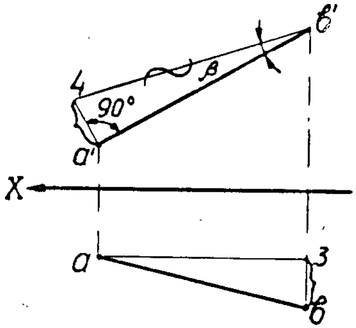


Рис. 87.

выражает натуральную величину отрезка прямой AB, а угол β — наклон этого отрезка к фронтальной плоскости проекций.

Итак, *натуральная величина отрезка, заданного на чертеже своими проекциями, равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен одной из проекций отрезка, а другой катет равен разности расстояний концов другой проекции этого отрезка до оси проекций.*

Пример. Определить расстояние от точки A до начала координат (рис. 88).

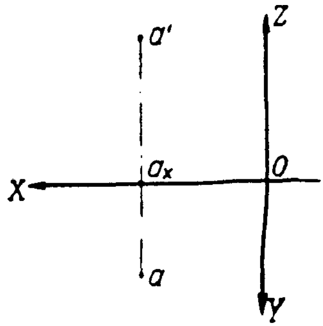


Рис. 88.

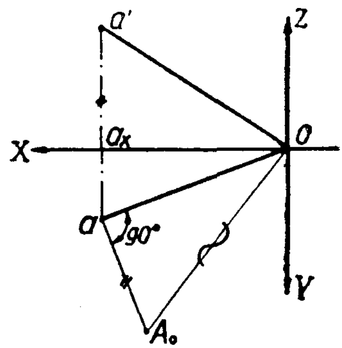


Рис. 89.

Решение (рис. 89). Так как точка O находится на оси проекций X, то ее горизонтальная и фронтальная проекции совпадают. Соединив одноименные проекции точек, получим отрезок AO, заданный своими проекциями $a'O$ и aO. Теперь найти величину этого отрезка не представляет труда. Для этого из точки a проведем прямую, перпендикулярную к горизонтальной проекции aO, и на ней отложим $aA_0 = a'a_x$ — разность расстояний от концов фронтальной проекции отрезка до оси X (расстояние точки O до плоскости H равно нулю). Отрезок A_0O и будет выражать искомое расстояние.

§ 12. Следы прямой линии

Следами прямой линии называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций (рис. 90). Точка M называется *горизонтальным следом* прямой, а точка N — ее *фронтальным следом.*

Надо научиться находить следы любых прямых на чертеже. Для этого найдем проекции следов и проекции отрезка прямой AB (рис. 91). Горизонтальный след прямой — точка M лежит в плоскости проекций H и, следовательно, ее горизонтальная проекция m совпадет с самим следом, фронтальная проекция m' будет находиться на оси проекций X. Фронтальный след прямой — точка N лежит в плоскости проекций V и, следовательно, ее фронтальная проекция n' совпадет с самим следом, а горизонтальная проекция n будет находиться на оси проекций X.

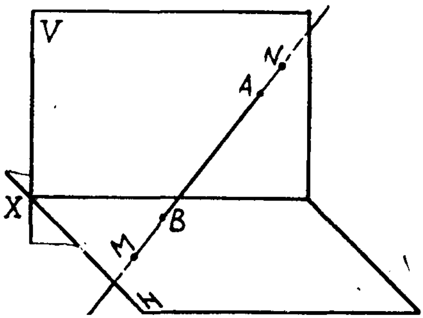


Рис. 90.

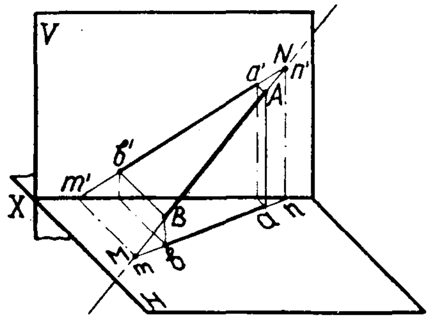


Рис. 91.

Как видно из рис. 91, *для определения фронтального следа прямой по ее проекциям надо горизонтальную проекцию прямой ab продолжить до оси проекций X, в точке пересечения с осью X восставить перпендикуляр к оси и продолжить его до пересечения с продолжением фронтальной проекции a′b′. Для определения горизонтального следа прямой необхо-*

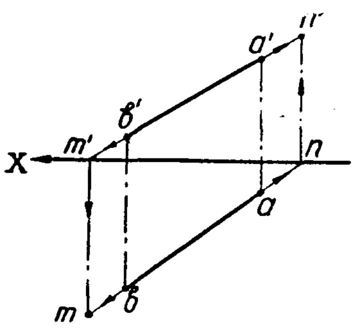


Рис. 92.

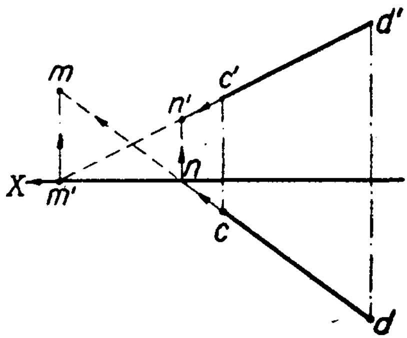


Рис. 93.

димо продолжить фронтальную проекцию a′b′ до пересечения с осью X, из точки m′ (фронтальной проекции горизонтального следа) *восставить перпендикуляр к оси X и продолжить его до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab*. Точка m является горизонтальной проекцией горизонтального следа, она совпадает с самим следом.

На рис. 92 показано построение следов прямой AB на чертеже.

По положению точек M и N можно судить, через какие четверти пространства проходит данная прямая. На рис. 92 прямая AB находится в первой четверти; через горизонтальный след M она проходит в четвертую четверть, а через фронтальный след N — во вторую четверть.

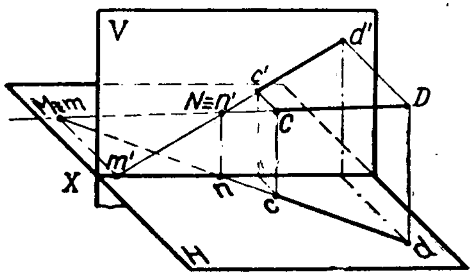


Рис. 94.

Пример 1. Найти следы прямой CD, заданной на чертеже своими проекциями, и указать, через какие четверти пространства она проходит (рис. 93).

Решение. Нахождение следов прямой CD на рис. 93 показано стрелками. Здесь необычным кажется определение горизонтального следа, т. к. перпендикуляр приходится проводить не вниз от оси X, как было указано в предыдущей задаче, а вверх — до пересечения с продолжением горизонтальной проекции cd. Это объясняется расположением прямой CD относительно плоскостей проекций, что наглядно показано на рис. 94. Как видно из рисунка, прямая CD,

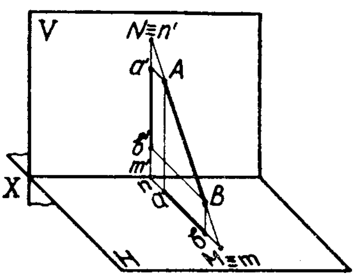


Рис. 95.

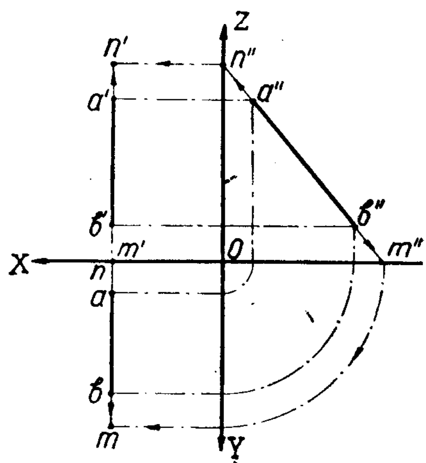


Рис. 96.

находящаяся в первой четверти, через фронтальный след N проходит во вторую четверть и через горизонтальный след M, находящийся на полуплоскости H_1,— в третью четверть.

Пример 2. Найти следы профильной прямой AB и указать, через какие четверти пространства она проходит.

Решение. На рис. 95 дано наглядное изображение прямой AB и на рис. 96 — определение следов этой прямой на чертеже. Строим профильную проекцию данного отрезка ($a''b''$), определяем положение профильных проекций горизонтального следа (точка m'') и фронтального следа (точка n'') и затем находим положение остальных проекций этих следов (последовательность построения на рис. 96 показана стрелками).

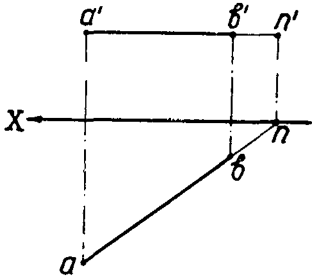


Рис. 97.

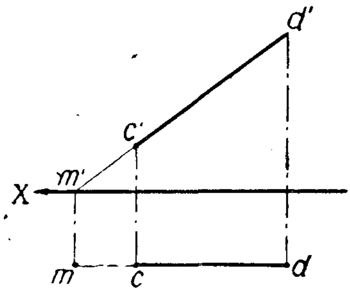


Рис. 98.

Прямая не имеет следа на плоскости проекций в том случае, когда она параллельна этой плоскости. На рис. 97 горизонтальная прямая AB будет иметь только фронтальный след N; на рис. 98 показана фронтальная прямая CD, которая будет иметь только горизонтальный след M.

Студентам предлагается самостоятельно определить следы прямых различного положения в системе трех плоскостей проекций и указать, через какие октанты проходят эти прямые.

§ 13. Взаимное положение двух прямых

1) Параллельные прямые. *Если две прямые, расположенные в пространстве, параллельны между собой, то их одноименные проекции также будут параллельны.* Это исходит из свойств параллельных проекций (§ 3).

Будет ли верно обратное заключение, т. е. будут ли параллельны две прямые в пространстве, если на чертеже их одноименные проекции попарно параллельны? Да, если даны параллельные между собой проекции на каждой из трех плоскостей проекций H, V и W. Но если даны параллельные между собой проекции прямых только на двух плоскостях проекций, то это положение будет справедливо всегда для прямых общего положения и может не подтвердиться для прямых частного положения. На рис. 99 даны проекции двух профильных прямых AB и CD. Их горизонтальные и фронтальные проекции взаимно параллельны, однако самые прямые не параллельны. Это легко установить, построив их профильные проекции. Такие прямые называются *скрещивающимися*.

Если в общем случае требуется через данную точку A (a, a') провести прямую, параллельную данной прямой L (l, l') (рис. 100), то построение сводится к проведению через фронтальную проекцию a' прямой, параллельной l', и к проведению через горизонтальную проекцию a прямой, параллельной l.

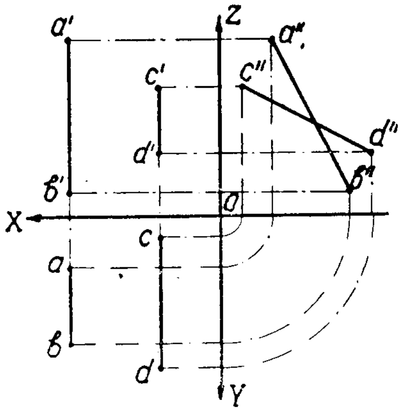


Рис. 99.

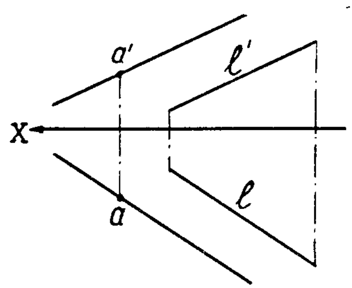


Рис. 100.

2) Пересекающиеся прямые. *Если прямые линии пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой в точках, которые являются проекциями точки пересечения этих прямых.*

На рис. 101 показаны две пересекающиеся прямые AB и CD. Точка пересечения (K) этих прямых принадлежит обеим прямым, и, следовательно, проекция этой точки должна лежать одновременно на проекциях обеих прямых, т. е. в точке их пересечения.

На чертеже пересекающиеся прямые определить довольно просто. На рис. 102 заданы своими проекциями две пересекающиеся прямые AB и CD. Обратите внимание: проекции точки пересечения прямых k и k' лежат на одном перпендикуляре к оси X, т. е. на одной линии связи. Это условие будет справедливым всегда для прямых общего положения. Но если одна из данных прямых параллельна какой-либо из плоскостей проекций, а на чертеже не даны проекции на этой плоскости, то нельзя утверждать, что такие прямые пересекаются между собой, хотя бы и было соблюдено указанное выше условие.

Например, на рис. 103 прямые *AB* и *CD*, из которых прямая *CD* параллельна плоскости *W*, не пересекаются между собой; это легко проверить построением профильной проекции этих прямых.

3) Скрещивающиеся прямые. *Это такие прямые, которые не параллельны и не пересекаются между собой.*

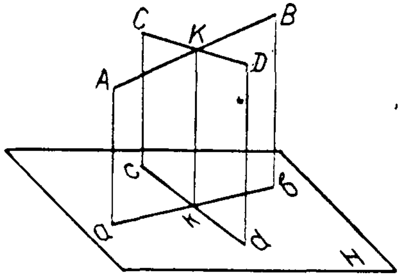


Рис. 101.

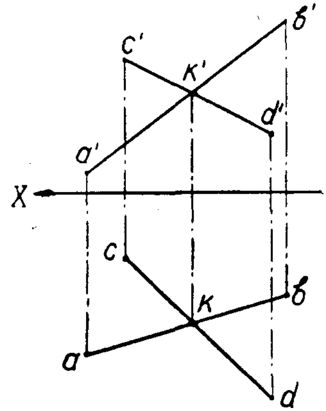


Рис. 102.

На рис. 104 показаны проекции двух прямых *AB* и *CD*. Эти прямые не пересекаются, т. к. точки пересечения одноименных проекций не лежат на одной линии связи, эти прямые и не параллельны, т. к. их одноименные проекции не параллельны.

Такие прямые называют *скрещивающимися*.

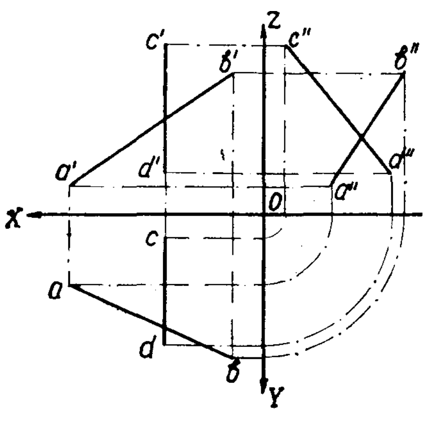


Рис. 103.

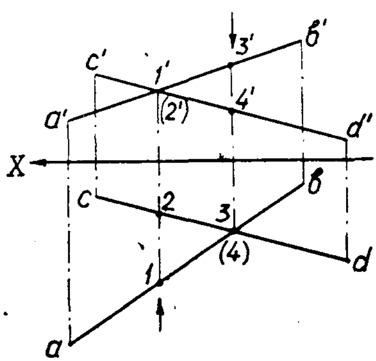


Рис. 104.

Точка пересечения фронтальных проекций — это проекции двух точек 1 и 2, из которых одна, точка 1, лежит на прямой *AB*, а вторая, точка 2 — на прямой *CD*. Обе точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости проекций *H*, но на разных расстояниях от плоскости *V*. Как видно из рис. 104 (направление взгляда указано стрелкой), точка 1 находится ближе к нам, она будет видима на фронтальной проекции по отношению к точке 2, лежащей на прямой *CD*. Обычно невидимую проекцию точки заключают в скобки. Точка пересечения горизонтальных проекций является также проекцией двух точек, из которых точка 3 лежит на прямой *AB*, а точка 4 — на прямой *CD*. Эти точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости проекций *V*, но относительно плоскости проекций *H* точка 3 расположена выше точки 4. Если смотреть сверху по направлению стрелки, то будем видеть точку 3, лежащую на прямой *AB*. Она будет закрывать точку 4, лежащую на прямой *CD*. На горизонтальной проекции точка *4* будет невидима.

Подобным образом в дальнейшем будем определять видимость отдельных элементов на чертежах.

§ 14. О проекциях плоских углов

1) *Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость прямой угол проецируется в виде прямого же угла.*

На рис. 105 даны проекции прямого угла *ABC*, т. к. сторона *BC* параллельна плоскости *H*, а на плоскость *H* угол *ABC* спроецировался в виде прямого угла.

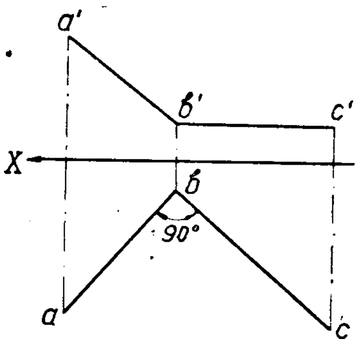


Рис. 105.

2) *Если проекция угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что по крайней мере одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций.*

3) *Если хотя бы одна сторона тупого или острого угла параллельна плоскости проекций, то проекция тупого угла на эту плоскость представляет собой тупой угол, а проекция острого угла — острый угол; при этом проекция острого угла меньше проецируемого угла, а проекция тупого угла больше проецируемого угла.*

4) *Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то его проекция равна по величине проецируемому углу.* (Более подробно о проекциях плоских углов см. В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. М, 1965, стр. 46—51).

Для закрепления данной темы рекомендуется решить следующие задачи:

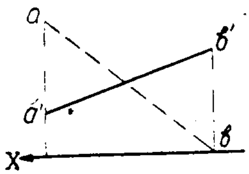


Рис. 106.

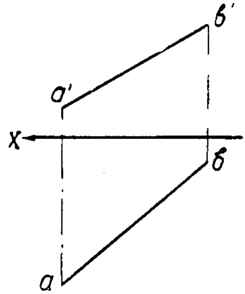


Рис. 107.

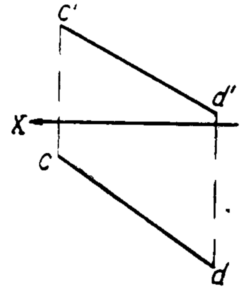


Рис. 108.

1. Построить проекции прямой, проходящей через точки *A* (7, 2, 5) и *B* (2, 4, 2).

2. Построить чертежи:

а) прямой, все точки которой отстоят на 30 *мм* от *H* и на 20 *мм* от *V;*

б) прямой, перпендикулярной к *H* и отстоящей от *V* на 20 *мм;*

в) профильной прямой, составляющей с плоскостью *H* угол 30°.

3. В какой четверти расположен отрезок *AB* (рис. 106) и как удалена от горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций точка этого отрезка, проекции которой сливаются на чертеже?

4. Найти точку, принадлежащую прямой *AB* (рис. 107) и одинаково удаленную от плоскостей *H* и *V*.

5. Построить следы прямой *CD* (рис. 108) и определить длину отрезка этой прямой между ее следами и углы, образуемые прямой с плоскостями проекций.

6. Следы прямой даны их координатами: для фронтального следа $x=-20$; $y=0$; $z=20$; для горизонтального следа $x=15$; $y=18$; $z=0$. Построить чертеж прямой и определить, через какие октанты прямая проходит.

7. Провести прямую, параллельную плоскости *H* и отстоящую от нее на указанном расстоянии так, чтобы эта прямая пересекала данные на рис. 109 скрещивающиеся прямые.

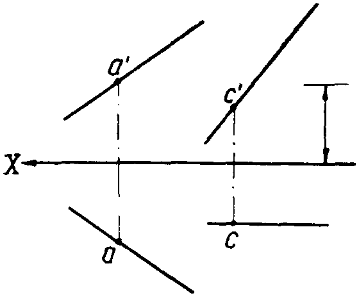


Рис. 109.

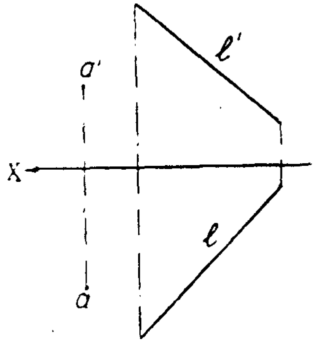


Рис. 110.

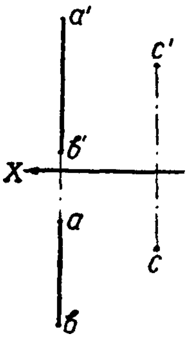


Рис. 111.

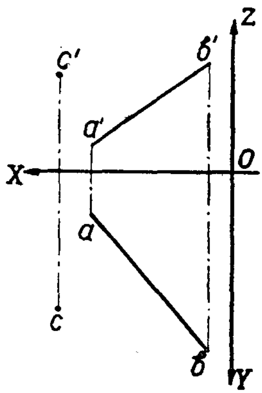


Рис. 112.

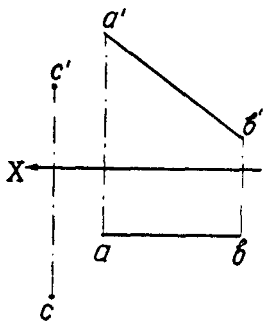


Рис. 113.

8. Через точку A (рис. 110) провести прямую, параллельную плоскости V и пересекающую прямую L (l, l').

9. Через точку C (рис. 111) провести прямую, параллельную плоскости H и пересекающую данную профильную прямую AB.

10. Через точку C (рис. 112) провести прямую, пересекающую данную прямую AB и ось Y.

11. Можно ли в данном случае (рис. 113) построить проекции перпендикуляра из точки C к прямой AB? Если можно, то произвести построение.

Глава 4

ПЛОСКОСТЬ

§ 15. Различные способы задания плоскости на чертеже

Как изобразить плоскость, находящуюся в пространстве, на плоском чертеже?

Если спроецировать все ее точки на плоскость проекций, то она закроет всю плоскость проекций и по чертежу невозможно будет определить положение плоскости в пространстве. Плоскость на чертеже поэтому будем задавать проекциями какой-либо фигуры, находящейся в данной плоскости и однозначно ее определяющей. Из курса средней школы известно, что плоскость в пространстве однозначно определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и

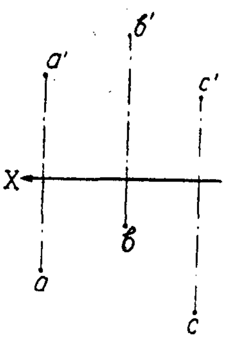


Рис. 114.

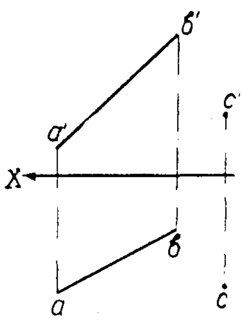


Рис. 115.

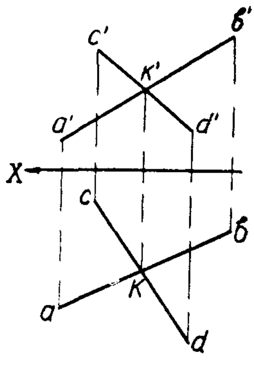


Рис. 116.

точкой, не лежащей на этой прямой; двумя пересекающимися прямыми; двумя параллельными прямыми; любой плоской фигурой.

В соответствии с этим на чертеже плоскость может быть задана:

1. Проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 114);
2. Проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис. 115);
3. Проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 116);
4. Проекциями двух параллельных прямых (рис. 117);
5. Проекциями плоской фигуры (рис. 118).

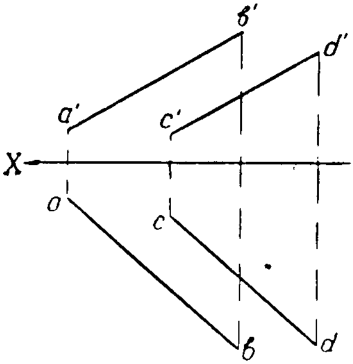


Рис. 117.

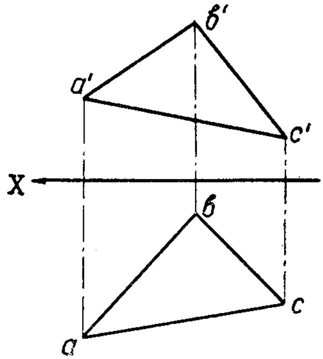


Рис. 118.

Каждый из представленных способов задания плоскости на чертеже может быть преобразован в любой другой из них.

Например, проведя через точки A и B (рис. 114) прямую, получим второй способ задания плоскости, представленной на рис. 115; соединив одноименные проекции точек A, B и C (рис. 114) в треугольник, получим пятый способ задания плоскости, изображенный на рис. 118.

§ 16. Следы плоскости

Более наглядно на чертеже плоскость может быть задана при помощи прямых, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекций. Эти прямые называются *следами плоскости* на плоскостях проекций.

На рис. 119 показана плоскость P и отмечены линии ее пересечения с плоскостями проекций. Прямая, по которой пересекается плоскость P с горизонтальной плоскостью проекций, называется *горизонтальным следом плоскости* и обозначается $P_н$; прямая, по которой пересекается плоскость P с фронтальной плоскостью проекций, называется *фронтальным следом плоскости* и обозначается P_v. Точка пересечения следов на оси проекций X называется *точкой схода следов* и обозначается P_x.

След плоскости на плоскости проекций сливается со своей проекцией на этой плоскости.

След $P_н$ (рис. 119) сливается со своей горизонтальной проекцией; фронтальная проекция этого следа располагается на оси X. След P_v сливается со своей фронтальной проекци-

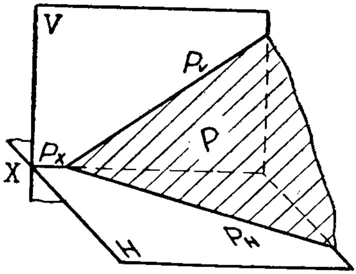


Рис. 119.

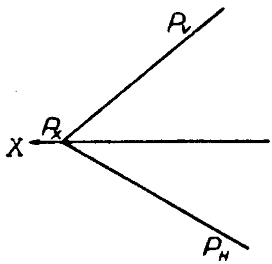


Рис. 120.

ей; горизонтальная проекция этого следа располагается на оси X. На чертеже плоскость может быть задана проекциями ее следов, но можно ограничиться обозначением только самих следов (рис. 120). Такой чертеж нагляден и представляет удобства при некоторых построениях.

Угол между следами на чертеже не равен углу, образованному следами плоскости в пространстве. В точке пересе-

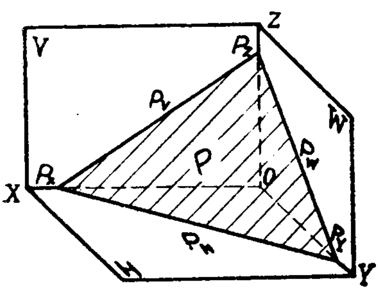


Рис. 121.

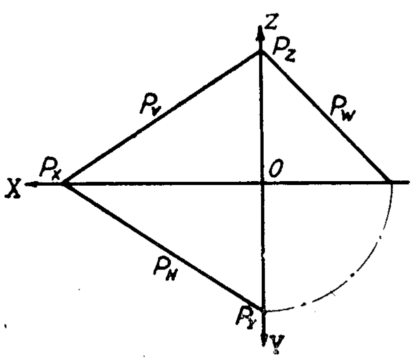


Рис. 122.

чения следов находится вершина трехгранного угла, две грани которого совпадают с плоскостями проекций (рис. 119). Но сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла. Поэтому угол между следами $P_н$ и

P_v на чертеже всегда больше угла между следами $P_н$ и P_v в пространстве.

На рис. 121 показана плоскость P в системе трех плоскостей проекций H, V и W. След P_w называют *профильным следом плоскости.*

На рис. 122 дан чертеж плоскости P в системе трех плоскостей проекций.

От любого из описанных в § 15 способов задания плоскости на чертеже легко перейти к способу задания плоскости ее следами. На рис. 123 изображена плоскость P, и в ней проведены две пересекающиеся прямые AB и CD. Как видно из рис. 123, фронтальные следы этих прямых N_1 и N_2 находятся на фронтальном следе P_v плоскости P, а горизонтальные следы M_1 и M_2 — на горизонтальном следе $P_н$ этой плоскости.

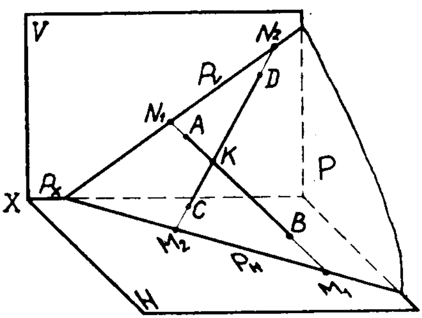


Рис. 123.

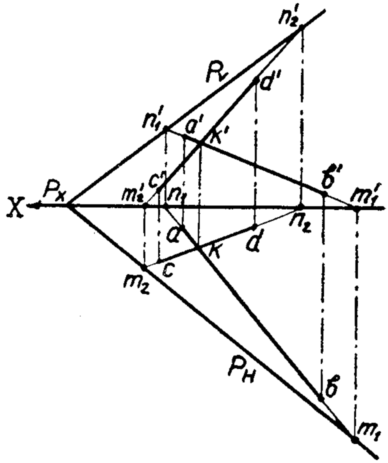


Рис. 124.

Следовательно, *чтобы построить на чертеже следы плоскости, заданной, например, двумя пересекающимися прямыми, достаточно определить следы прямых и через два фронтальных следа прямых провести фронтальный след плоскости, а через два горизонтальных следа прямых — горизонтальный след плоскости.*

Построение на чертеже следов плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD, показано на рис. 124. Точка схода следов P_x в этом случае может служить контрольной точкой: если построение сделано правильно, то оба следа должны пересечься на оси X в одной точке.

§ 17. Характерные положения плоскости относительно плоскостей проекций

1) Плоскость, не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций. Такая плоскость называется *плоскостью общего положения.*

Наглядно плоскости общего положения показаны на рис. 119, 121, 123. На рис. 125 плоскости общего положения

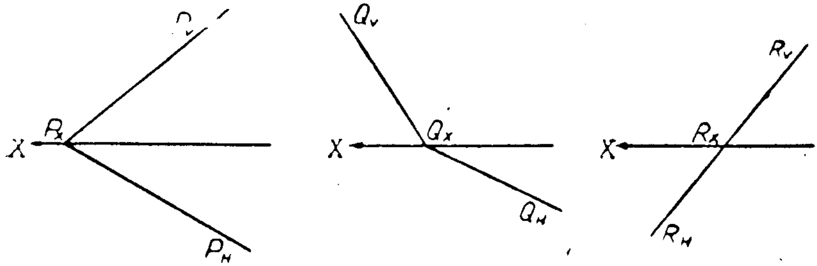


Рис. 125.

P, Q и *R* заданы на чертеже следами. На рис. 126 плоскость общего положения задана проекциями треугольника *ABC*, а на рис. 127 — проекциями двух параллельных прямых *AB* и *CD*.

2) Плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций (рис. 128). Такие плоскости называются *горизонтально-проецирующими.*

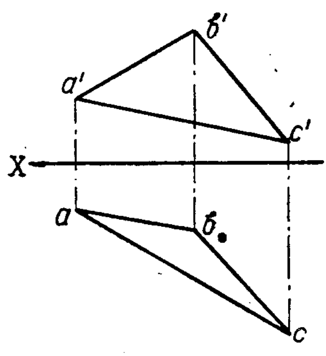


Рис. 126.

На рис. 129 показан чертеж горизонтально - проецирующей плоскости *S*. Фронтальный след такой плоскости всегда перпендикулярен к оси проекций *X*. Угол β между горизонтальным следом *S* и осью *X* показывает наклон этой плоскости к фронтальной плоскости проекций *V*, а угол γ между горизонтальным следом $S_н$ и осью *Y* — наклон плоскости *S* к профильной плоскости проекций *W*.

На рис. 130 показана горизонтально-проецирующая плоскость, заданная на чертеже проекциями треугольника *ABC*, а на рис. 131 — проекциями двух пересекающихся прямых *AB* и *CD*.

Следует отметить очень важное свойство горизонтально-проецирующей плоскости: *если какие-либо точки, прямые (или* *плоские кривые) линии или плоские фигуры находятся в горизонтально-проецирующей плоскости, то их горизонтальные проекции будут лежать на горизонтальном следе этой плоскости* (см. точку A на рис. 128).

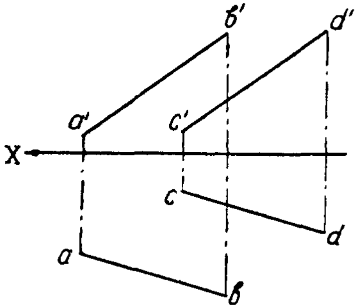


Рис. 127.

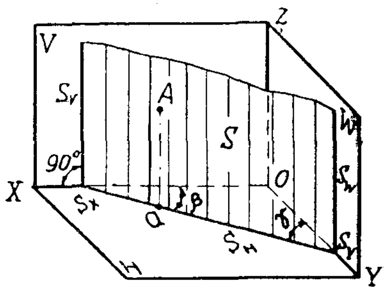


Рис. 128.

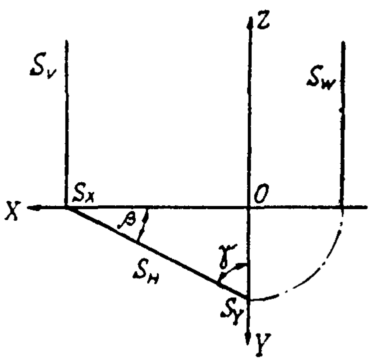


Рис. 129.

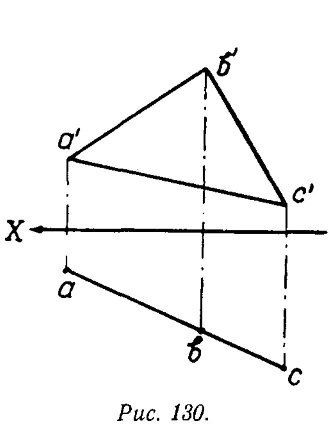


Рис. 130.

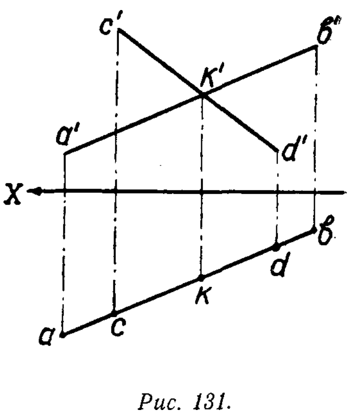


Рис. 131.

Пример 1. Через прямую AB провести горизонтально-проецирующую плоскость S (рис. 132).

Решение. **Горизонтальный след $S_н$** пройдет через горизонтальную проекцию ab прямой, а фронтальный след S_v всегда будет перпендикулярен оси X.

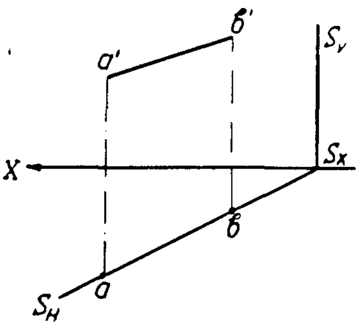


Рис. 132.

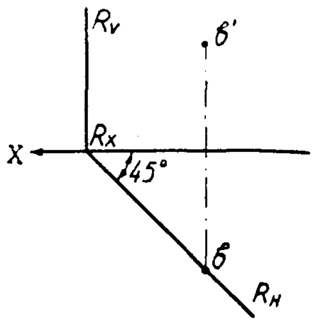


Рис. 133.

Пример 2. Через точку B провести горизонтально-проецирующую плоскость R под углом 45° к плоскости V (рис. 133).

Решение. Горизонтальный след $R_н$ пройдет через горизонтальную проекцию точки B под углом 45° к оси X, а фронтальный след R_v будет перпендикулярен к оси X.

3) Плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций (рис. 134). Такие плоскости называются *фронтально-проецирующими.*

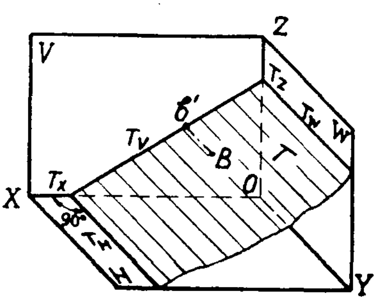


Рис. 134.

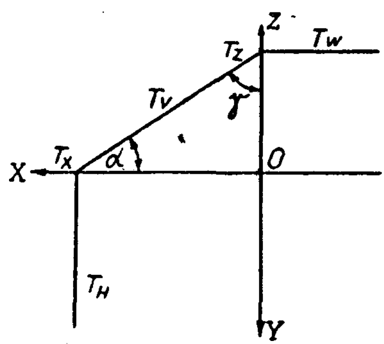


Рис. 135.

На рис. 134 — наглядное изображение, а на рис. 135 — чертеж фронтально-проецирующей плоскости T. Горизонтальный след этой плоскости всегда перпендикулярен к оси проекций X. Угол α между фронтальным следом T_v и осью X показывает наклон плоскости T к горизонтальной плоскости проекций H, а угол γ между фронтальным следом T_v и осью проекций Z — наклон плоскости T к профильной плоскости проекций W.

На рис. 136 показана фронтально-проецирующая плоскость, заданная на чертеже проекциями треугольника ABC.

Важным свойством этой плоскости является то, что *фронтальные проекции всех точек, прямых линий или плоских фигур, находящихся во фронтально-проецирующей плоскости, лежат на фронтальном следе этой плоскости.* (См. точку B на рис. 134).

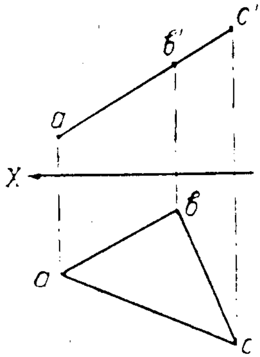


Рис. 136.

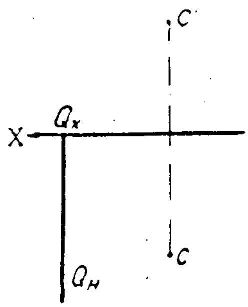


Рис. 137.

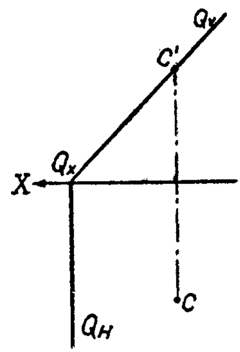


Рис. 138.

Пример 1. Построить недостающий след плоскости Q, если известно, что точка C лежит в этой плоскости (рис. 137).

Решение дано на рис. 138. Плоскость Q — фронтально-проецирующая, поэтому фронтальный след Q_v этой плоскости должен пройти через фронтальную проекцию точки и точку схода следов Q_x.

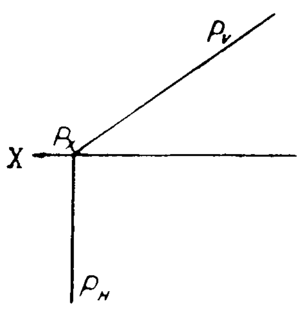


Рис. 139.

Пример 2. Во фронтально-проецирующей плоскости P, изображенной на рис. 139, найти точку D, расположенную на расстоянии 15 *мм* от плоскости H и 20 *мм* от плоскости V.

Этот пример студентам рекомендуется решить самостоятельно.

4) Плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций. Такие плоскости называются *профильно-проецирующими.*

На рис. 140 наглядно показана профильно-проецирующая плоскость R, а на рис. 141 дан чертеж этой плоскости. Горизонтальный и фронтальный следы этой плоскости параллельны оси X и, следовательно, параллельны между собой. Угол α (рис. 141) показывает наклон профильно-проецирующей плоскости к горизонтальной плоскости проекций, а угол β — наклон ее к фронтальной плоскости проекций.

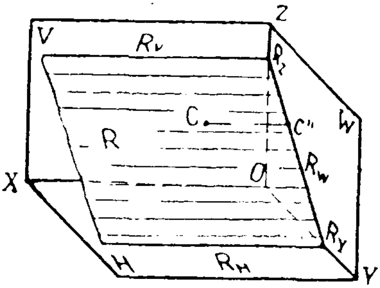


Рис. 140.

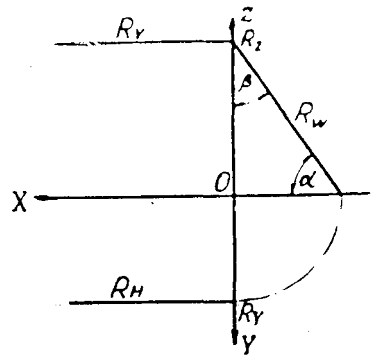


Рис. 141.

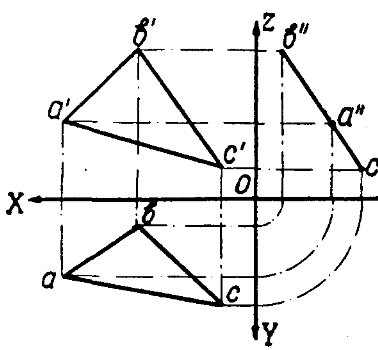


Рис. 142.

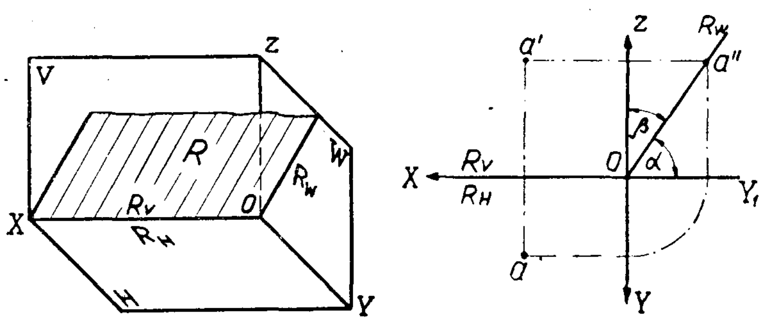


Рис. 143.

На рис. 142 профильно-проецирующая плоскость задана проекциями треугольника ABC.

Если точки, прямые (кривые) линии или плоские фигуры находятся в профильно-проецирующей плоскости, то их профильные проекции будут лежать на профильном следе этой плоскости. (См. точку C на рис. 140).

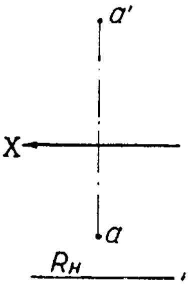


Рис. 144.

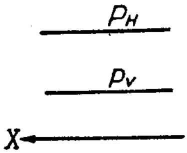


Рис. 145.

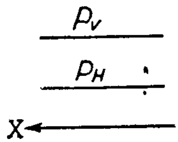


Рис. 146.

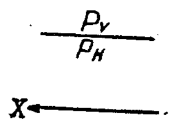


Рис. 147.

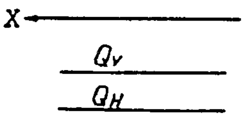


Рис. 148.

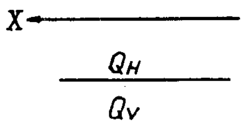


Рис. 149.

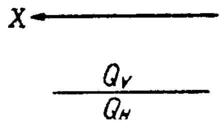


Рис. 150.

Изображенная на рис. 143 плоскость R также является профильно-проецирующей, она проходит через ось проекций X. Такую плоскость дополнительно будем называть *осевой плоскостью*. Фронтальный и горизонтальный следы этой плоскости совпадают с осью X; угол α между профильным следом

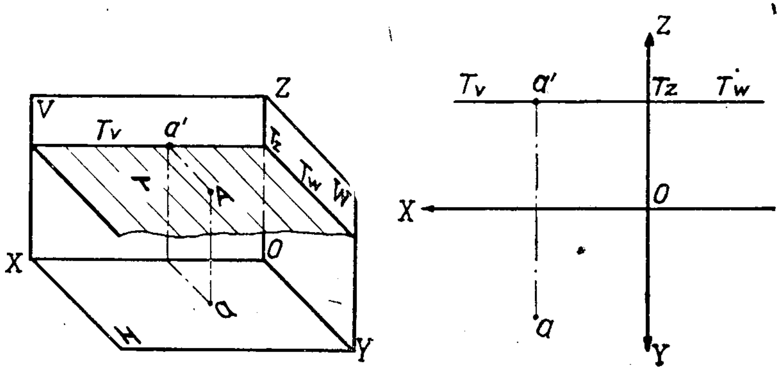


Рис. 151.

и осью Y_1 показывает наклон этой плоскости к горизонтальной плоскости проекций, угол β между профильным следом и осью Z — наклон к фронтальной плоскости проекций. Если $\alpha = \beta = 45°$, то такая плоскость будет называться *биссекторной плоскостью.*

Задача 1. Построить недостающий след плоскости R, проходящей через заданную точку A (рис. 144).

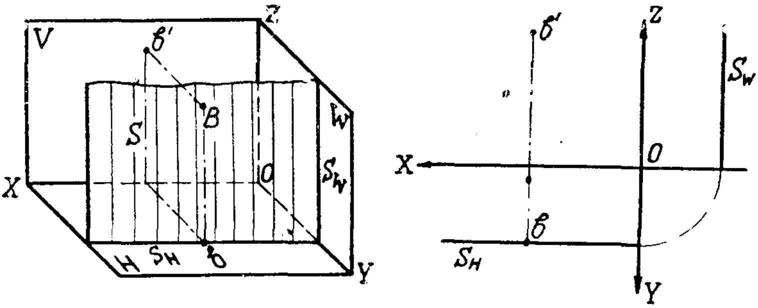


Рис. 152.

Задача 2. Построить профильные следы плоскостей, изображенных на рис. 145—150.

5) Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 151). Такие плоскости называются *горизонтальными.*

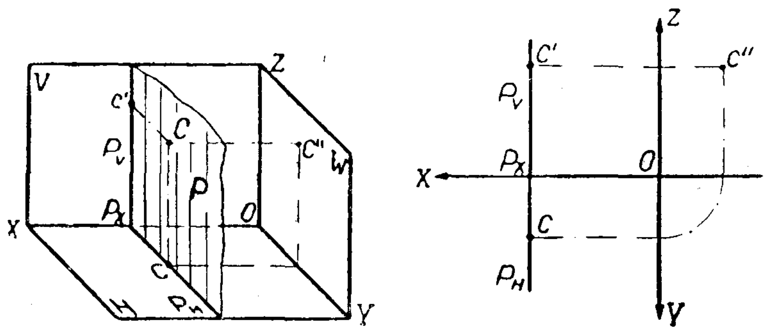


Рис. 153.

6) Плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 152). Такие плоскости называются *фронтальными.*

7) Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (рис. 153). Такие плоскости называются *профильными.*

§ 18. Прямая и точка в плоскости

Как на чертеже определить: лежат ли данные прямые или точки в заданной плоскости? Если будут даны плоскости частного положения, т. е. перпендикулярные или параллельные каким-либо плоскостям проекций, то вопрос решается просто (см. рис. 128—144, 151—153). В этом случае, *если какие-либо проекции точек или прямых будут находиться на соответствующих им следах плоскости, то такие точки или прямые будут находиться в данной плоскости.*

В случае плоскостей общего положения это определение основано на следующих положениях, известных из геометрии.

1) *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.*

2) *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или ей параллельной.*

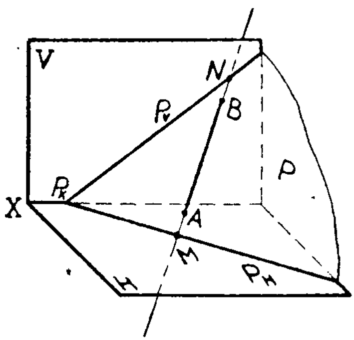


Рис. 154.

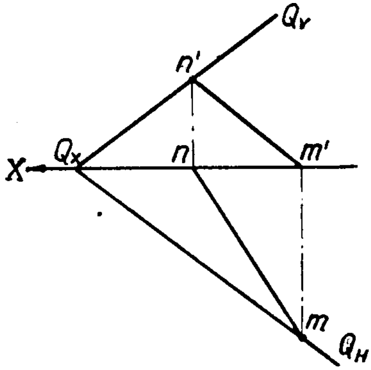


Рис. 155.

На рис. 154 прямая *AB* лежит в плоскости *P*, т. к. она проходит через две точки (следы *M* и *N* прямой *AB*), находящиеся в плоскости *P*. Эти точки наиболее удобны для определения принадлежности прямой данной плоскости, т. к. определение следов любой прямой не представляет трудностей.

Отсюда вытекает правило: *прямая принадлежит плоскости, если следы прямой находятся на одноименных с ними следах плоскости* (рис. 155 и 156).

Изображенная на рис. 157 прямая *CD* принадлежит плоскости *P*, т. к. она проходит через точку *C*, принадлежащую плоскости *P* (точка *C* лежит на следе P_v плоскости *P*), и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости (в данном случае прямой является горизонтальный след плоскости $P_н$). Чертеж данной прямой CD показан на рис. 158.

На рис. 159 дан чертеж прямой EF, которая принадлежит плоскости Q, т. к. эта прямая проходит через точку E, находящуюся в плоскости Q, и параллельна прямой Q_v, лежащей в этой же плоскости.

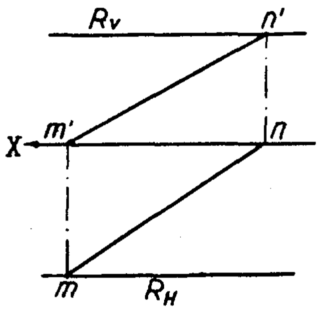


Рис. 156.

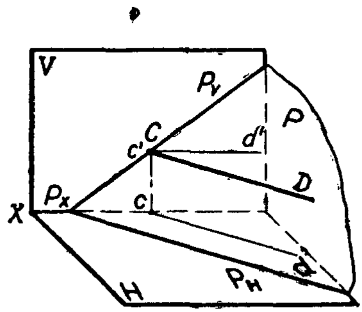


Рис. 157.

Отсюда вытекает другое правило: *прямая принадлежит плоскости, если она параллельна одному из следов плоскости и имеет с другим следом общую точку.*

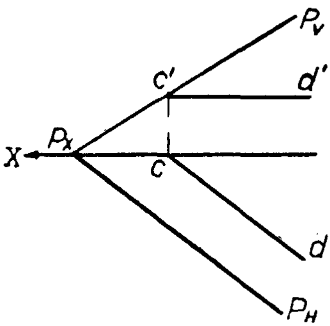


Рис. 158.

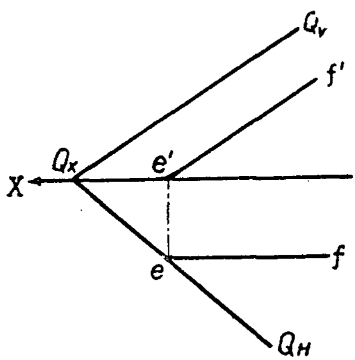


Рис. 159.

Для того чтобы определить, лежит ли точка в плоскости, надо запомнить следующее правило: *точка лежит в плоскости, если через нее возможно провести прямую, заведомо принадлежащую данной плоскости.*

Пример 1. На рис. 160 дан чертеж плоскости P и точки A. Требуется определить, лежит ли точка A в плоскости P.

Решение дано на рис. 161.

Через точку A проведена прямая общего положения MN и найдены следы этой прямой. Если в результате построения следы этой прямой окажутся на соответствующих следах плоскости, то прямая MN будет принадлежать данной плоскости P и точка A, находящаяся на прямой MN, также будет принадлежать плоскости P.

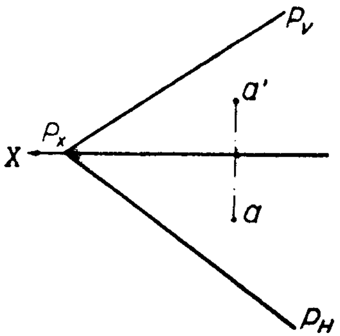


Рис. 160.

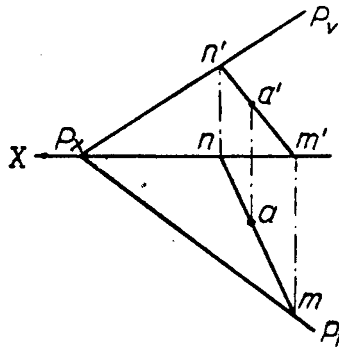


Рис. 161.

Эту задачу можно решить и при помощи прямой, имеющей общую точку с одним из следов плоскости и параллельной другому следу. Решение дано на рис 162.

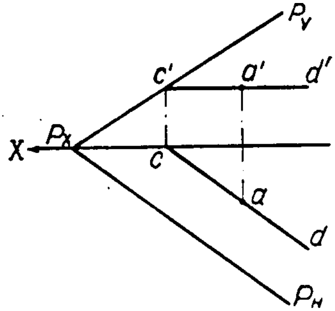


Рис. 162.

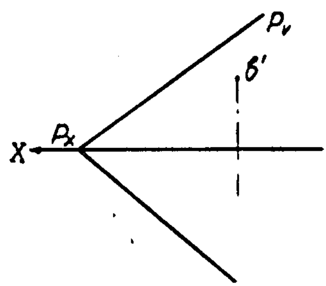


Рис. 163.

Через фронтальную проекцию точки a' проведена фронтальная проекция прямой $c'd' \| X$, затем найдена горизонтальная проекция этой прямой. Если горизонтальная проекция прямой пройдет через горизонтальную проекцию точки, значит точка A будет находиться на прямой CD и будет принадлежать плоскости P.

Пример 2. Найти горизонтальную проекцию точки B, лежащей в плоскости P, если дана фронтальная проекция этой точки b' (рис. 163). Решение дано на рис. 164.

Проекции точки B должны лежать на соответствующих проекциях прямой, принадлежащей данной плоскости. Поэтому вначале проводим прямую, принадлежащую данной плоскости (фронтальная проекция прямой пройдет через фронтальную проекцию точки, параллельно оси проекций, а горизонтальная проекция прямой пройдет параллельно горизонтальному следу плоскости). Горизонтальную проекцию точки теперь легко определим, проведя линию связи из b' до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

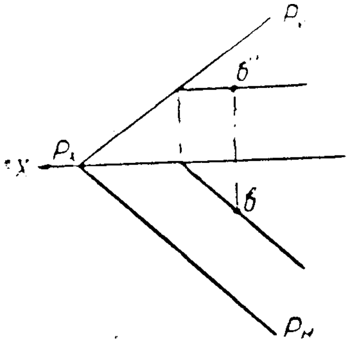


Рис. 164.

Пример 3. Найти фронтальную проекцию точки D, если задана ее горизонтальная проекция d и известно, что точка D должна лежать в плоскости, определяемой треугольником ABC (рис. 165).

Решение. Проведем на горизонтальной проекции прямую через точки a и d и отметим точку m, где прямая ad пересечет отрезок bc. Построив фронтальную проекцию m' на $b'c'$, получим прямую AM, расположенную в плоскости треугольника ABC, т. к. она проходит через две точки A и M,

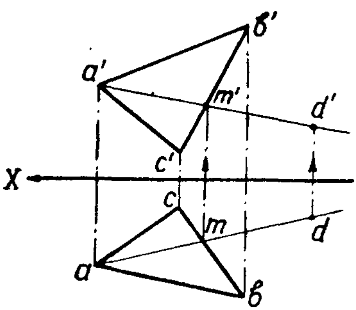


Рис. 165.

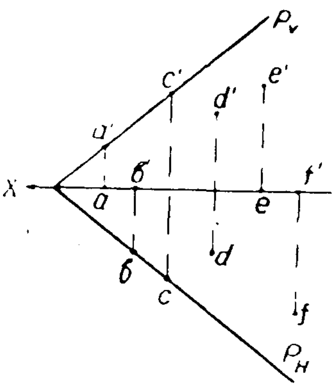


Рис. 166.

принадлежащие данной плоскости. Искомая фронтальная проекция d' точки D определится в пересечении линии связи, проведенной из точки d, с фронтальной проекцией $a'm'$.

Студентам рекомендуется определить, лежат ли точки A, B, C, D, E, F в плоскости P (рис. 166).

§ 19. Прямые особого положения в плоскости

Среди прямых линий, расположенных в данной плоскости, особое положение занимают *горизонтали, фронтали, профильные прямые и линии наибольшего ската плоскости.* Эти прямые, особенно горизонтали и фронтали, очень часто применяются в различных построениях и при решении задач. Это объясняется значительной простотой построения указанных прямых, поэтому их удобно применять в качестве вспомогательных.

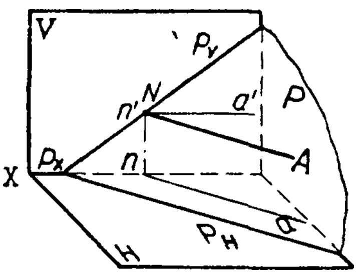


Рис. 167.

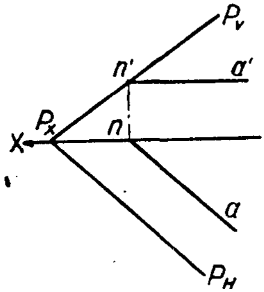


Рис. 168.

1) Горизонтали плоскости. *Это прямые, которые лежат в данной плоскости и параллельны горизонтальной плоскости проекций H.*

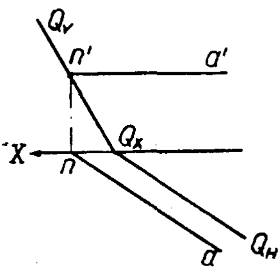


Рис. 169.

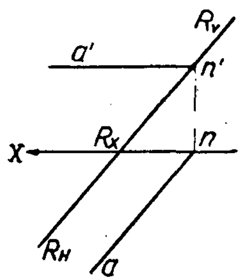


Рис. 170.

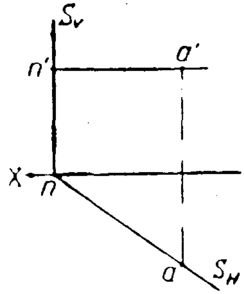


Рис. 171.

Одна из горизонталей NA плоскости P показана на рис. 167. Как видно из самого рисунка, фронтальная проекция горизонтали $n'a'$ будет проходить параллельно оси проекций X, а горизонтальная проекция горизонтали na будет параллельна горизонтальному следу P_H плоскости P. На рис. 168—173 показаны чертежи плоскостей общего и частных положений с проведенными в них горизонталями.

На рис. 173 горизонталь AN проведена в плоскости треугольника ABC. Построение горизонтали в этом случае надо начинать с построения ее фронтальной проекции, которая должна пройти параллельно оси проекций X. Здесь она проведена через вершину A треугольника ABC. Это сделано для упрощения построения горизонтальной проекции горизонтали, т. к. для ее построения требуется определить горизонтальную проекцию только одной точки N.

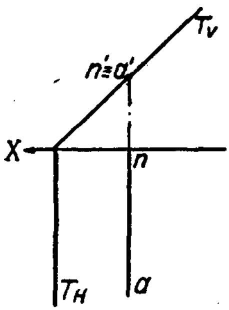


Рис. 172.

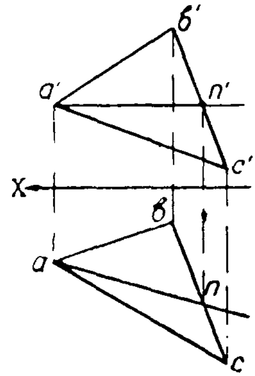


Рис. 173.

В общем же случае фронтальная проекция горизонтали может быть проведена в любом месте фронтальной проекции треугольника ABC; нужно только, чтобы она была параллельна оси проекций X.

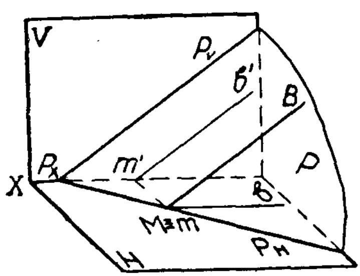


Рис. 174.

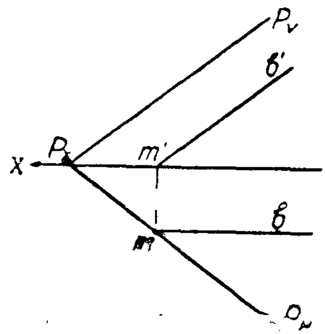


Рис. 175.

2) Фронтали плоскости. *Это прямые, которые лежат в данной плоскости и параллельны фронтальной плоскости проекций V.*

На рис. 174 показана одна из фронталей MB плоскости P. На чертеже горизонтальная проекция фронтали mb будет проходить параллельно оси проекций X, а фронтальная проекция фронтали $m'b'$ будет параллельна фронтальному следу плоскости.

На рис. 175—180 показаны чертежи плоскостей общего и частных положений с проведенными в них фронталями.

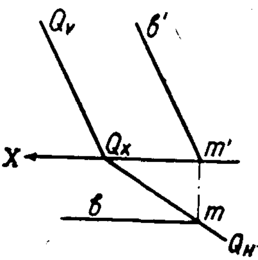


Рис. 176.

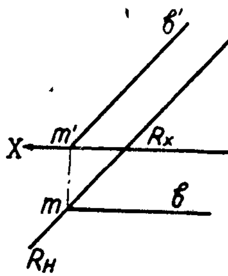


Рис. 177.

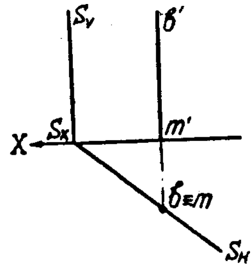


Рис. 178.

На рис. 180 фронталь AM проведена в плоскости треугольника ABC через вершину A. Построение фронтали начинаем с горизонтальной проекции. Проводим $am \| X$, затем определяем фронтальную проекцию m' и через нее и a' проводим

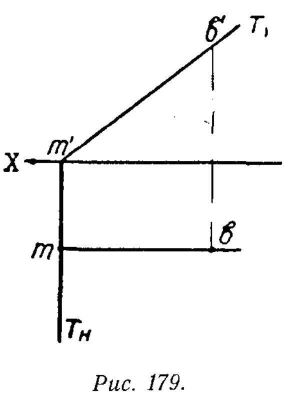


Рис. 179.

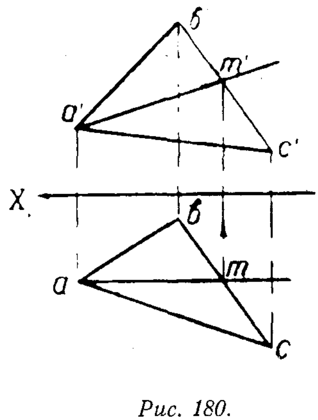


Рис. 180.

фронтальную проекцию фронтали. Такой порядок построения фронтали надо применять во всех случаях задания плоскости на чертеже.

3) Профильные прямые плоскости. *Это прямые, которые лежат в данной плоскости и параллельны профильной плоскости проекций W.*

На рис. 181 показана одна из профильных прямых MN плоскости P. На рис. 182 дано построение этой прямой на чертеже. Фронтальная и горизонтальная проекции этой прямой будут перпендикулярны к оси проекций X, а профильная проекция — параллельна профильному следу плоскости P_w.

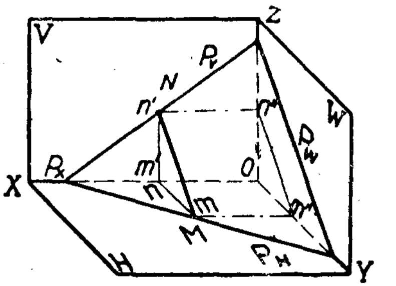


Рис. 181.

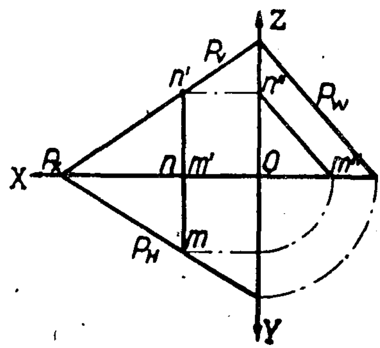


Рис. 182.

4) Линии наибольшего ската плоскости. *Это линии, которые лежат в плоскости и перпендикулярны к горизонталям данной плоскости.* Так как горизонтальный след плоскости сам является горизонталью данной плоскости (нулевая горизонталь), то *линия наибольшего ската плоскости будет перпендикулярна и к горизонтальному следу плоскости.*

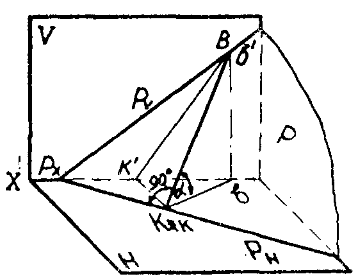


Рис. 183.

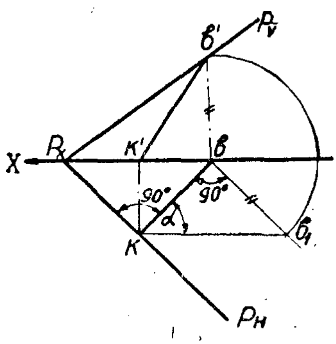


Рис. 184.

На рис. 183 показана линия наибольшего ската KB плоскости P. Согласно правилам проецирования прямого угла, горизонтальная проекция линии наибольшего ската плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости и к ее горизонтальному следу. Фронтальная проекция линии наибольшего ската строится после горизонтальной и может занимать различные положения, в зависимости от задания плоскости.

На рис. 184 дано построение линии наибольшего ската плоскости на чертеже. Построение линии наибольшего ската на чертеже следует начинать с горизонтальной проекции, которую проводят перпендикулярно к горизонтальному следу плоскости или перпендикулярно к горизонтальной проекции любой горизонтали данной плоскости. Фронтальная проекция линии ската может быть определена с помощью фронтальных проекций k' и b' следов этой прямой.

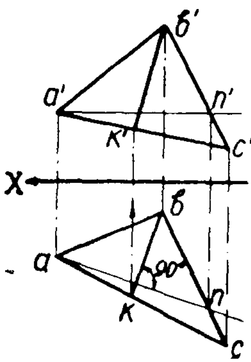


Рис. 185.

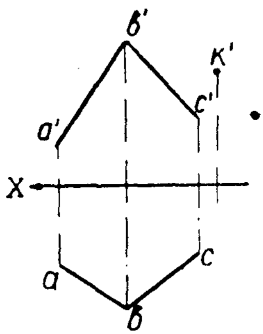


Рис. 186.

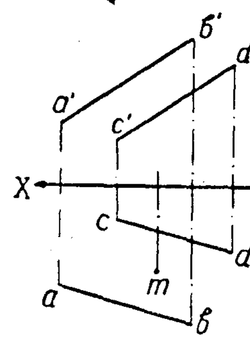


Рис. 187.

Из рис. 183 видно, что угол BKb является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями P и H; это есть угол наклона плоскости P к горизонтальной плоскости проекций H. Этот угол легко определить из прямоугольного треугольника BbK, в котором один катет Kb является горизонтальной проекцией линии наибольшего ската, а второй катет Bb — расстояние от точки B до плоскости H. Определение этого угла на чертеже показано на рис. 184.

На рис. 185 дано построение линии наибольшего ската BK в плоскости, заданной треугольником ABC. Для этого в плоскости треугольника вначале проведена горизонталь AN, а затем построена горизонтальная проекция линии наибольшего ската $bk \perp an$. Фронтальную проекцию линии ската определим, найдя фронтальную проекцию k'.

Для закрепления данной темы рекомендуется решить следующие задачи.

1) Построить горизонтальную проекцию точки K (рис. 186), если дана ее фронтальная проекция k' и известно, что эта точка принадлежит плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и BC.

2) Построить фронтальную проекцию точки M (рис. 187), если дана ее горизонтальная проекция m и известно, что эта точка принадлежит плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD.

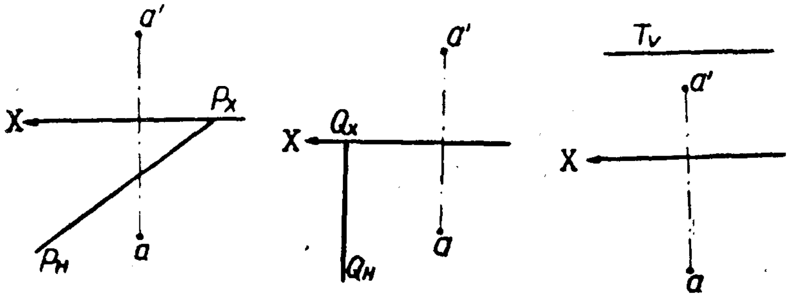


Рис. 188.

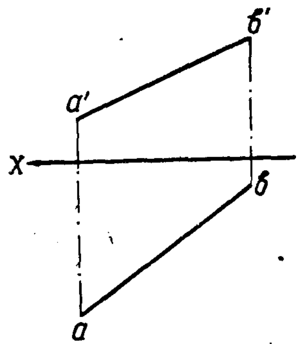


Рис. 189.

3) Построить второй след плоскостей P, Q, и T (рис. 188), если даны один след и точка A, лежащая в плоскости.

4) Построить плоскость, являющуюся геометрическим местом точек: а) равноудаленных от плоскостей H и V; б) отстоящих от плоскости H вдвое дальше, чем от плоскости V.

5) Через данную прямую AB (рис. 189) провести профильно-проецирующую плоскость, выразив ее следами на H и V.

Глава 5

О ВЗАИМНОМ ПОЛОЖЕНИИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

§ 20. Взаимное положение двух плоскостей

Две плоскости могут быть параллельными или пересекаться.

1) Параллельные плоскости. *Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.* Такими прямыми могут служить, например, следы обоих плоскостей.

Отсюда правило: *если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то обе плоскости параллельны между собой* (рис. 190).

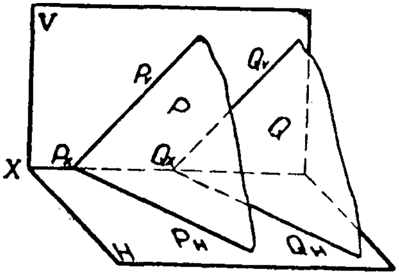


Рис. 190.

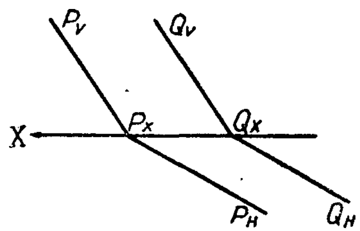


Рис. 191.

На рис. 191 дан чертеж параллельных плоскостей P и Q, заданных следами; на рис. 192 показаны две параллельные плоскости, одна из которых задана плоской фигурой — треугольником ABC, а другая — двумя пересекающимися прямыми MN и NK.

Пример. Через данную точку A провести плоскость, параллельную данной плоскости P (рис. 193).

Решение. Так как плоскости должны быть параллельны между собой, то и их горизонтали также должны быть парал-

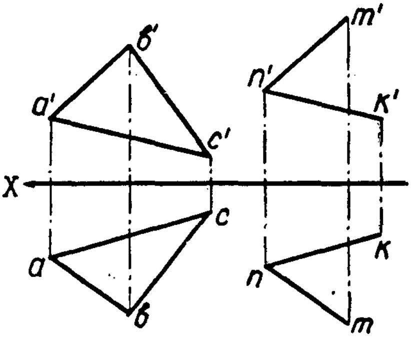


Рис. 192.

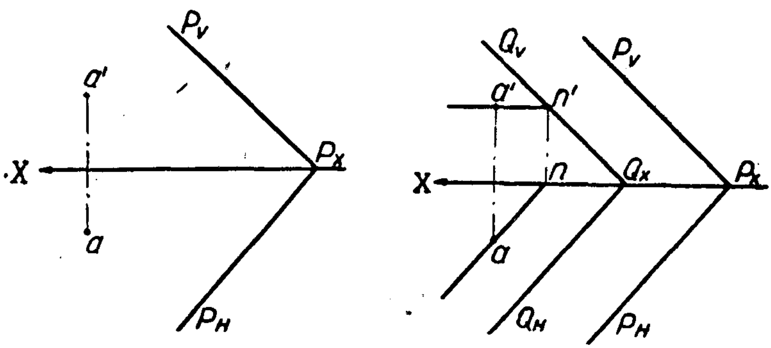


Рис. 193.

лельны. Поэтому через точку A проведем вначале горизонталь будущей плоскости (рис. 193, справа). Горизонтальная проекция горизонтали an будет параллельна следу $P_н$, а фронтальная проекция горизонтали $a'n'$ — параллельна оси проекций X. Далее, определив фронтальный след горизонтали AN, проводим через точку n' след Q_v параллельно следу P_v и через точку Q_x, полученную на оси X, проводим след $Q_н$ параллельно следу $P_н$.

Изображенные на рис. 194 плоскости P и Q пересекаются, хотя их фронтальные и горизонтальные следы взаимно параллельны. Это легко определить, построив их профильные следы.

Следовательно, если даны плоскости частного положения: горизонтально-, фронтально- или профильно-проецирующие, то для определения их взаимного расположения надо построить их следы на третьей плоскости проекций.

2) Пересекающиеся плоскости. *Если две плоскости пересекаются, то на чертеже, хотя бы на одной из проекций, их следы должны пересекаться.*

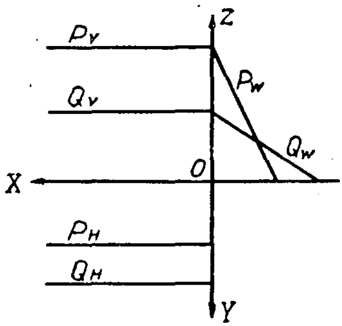


Рис. 194.

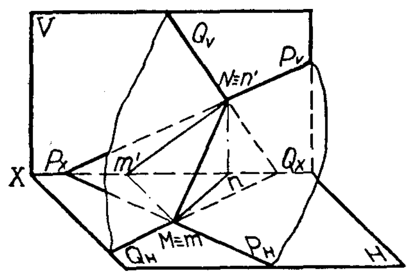


Рис. 195.

Если плоскости заданы не следами, то для определения их взаимного расположения надо произвести некоторые вспомогательные построения, о которых будет сказано позже.

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям, либо одну точку и направление линии пе-

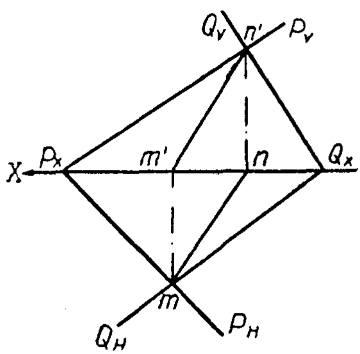


Рис. 196.

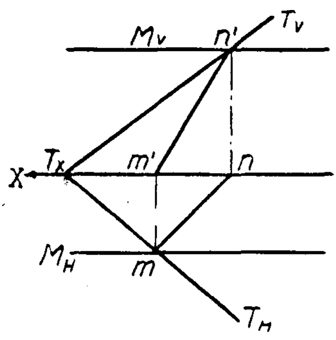


Рис. 197.

ресечения плоскостей. Для плоскостей с пересекающимися следами такими точками могут служить точки пересечения их одноименных следов (рис. 195).

Для определения на чертеже проекций линии пересечения двух плоскостей можно рекомендовать следующее правило: *для определения горизонтальной проекции линии пересечения* *двух плоскостей надо из точки пересечения двух фронтальных следов опустить перпендикуляр на ось проекций X и полученную точку на оси соединить с точкой пересечения двух горизонтальных следов; для определения фронтальной проекции линии пересечения двух плоскостей надо из точки пересечения двух горизонтальных следов опустить перпендикуляр на ось проекций X и полученную точку на оси соединить с точкой пересечения двух фронтальных следов.*

Используя это правило, определили проекции линий пересечения плоскостей P и Q (рис. 196); T и M (рис. 197); R и K (рис. 198); N и S (рис. 199). В последнем примере (рис. 199) горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей N и S будет лежать на горизонтальном следе $S_н$, так как плос-

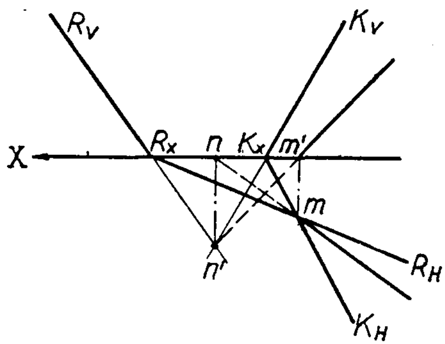


Рис. 198.

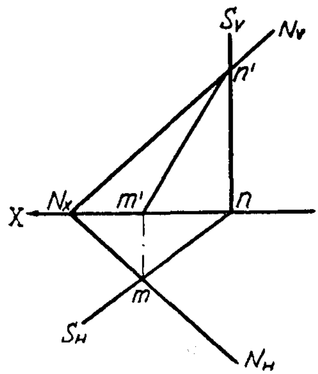


Рис. 199.

кость S — горизонтально-проецирующая, а горизонтальные проекции всех прямых, лежащих в этой плоскости, в том числе и линии пересечения плоскостей, будут лежать на горизонтальном следе этой плоскости.

На рис. 200 показаны две пересекающиеся плоскости P и T. Их линия пересечения будет являться горизонталью плоскости P, проходящей через точку пересечения фронтальных следов. В этом легко убедиться, исходя из следующих рассуждений: плоскость T — есть горизонтальная плоскость и все линии в ней горизонтальные. Линия, по которой пересекаются плоскости T и P, также будет горизонтальной и общей для обеих плоскостей; а прямая, лежащая в плоскости P и параллельная горизонтальной плоскости проекций, есть горизонталь плоскости P.

На основании этого можно сказать, что плоскость общего положения Q (рис. 201) пересекается с фронтальной плоскостью R по фронтали.

Определение линии пересечения двух плоскостей, заданных плоскими фигурами, показано на рис. 202. Для нахождения линии пересечения этих плоскостей проведена вспомогательная горизонтальная плоскость S. Эта плоскость пересекает плоскость треугольника ABC по горизонтали 1—2, а плоскость треугольника DEF — по горизонтали 3—4. Точка

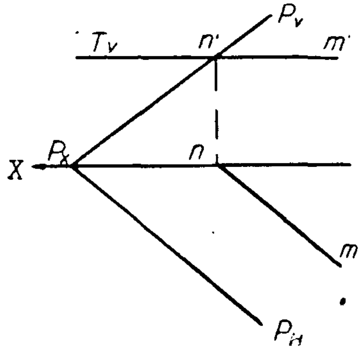


Рис. 200.

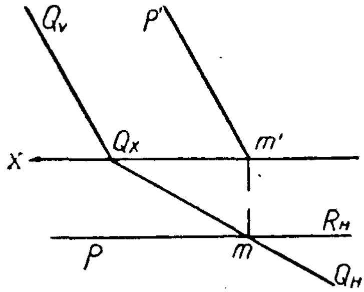


Рис. 201.

пересечения этих горизонталей, точка K_1, является общей для обеих заданных плоскостей, т. е. одной из точек линии пересечения. Вторая точка K_2 найдена аналогично при помощи

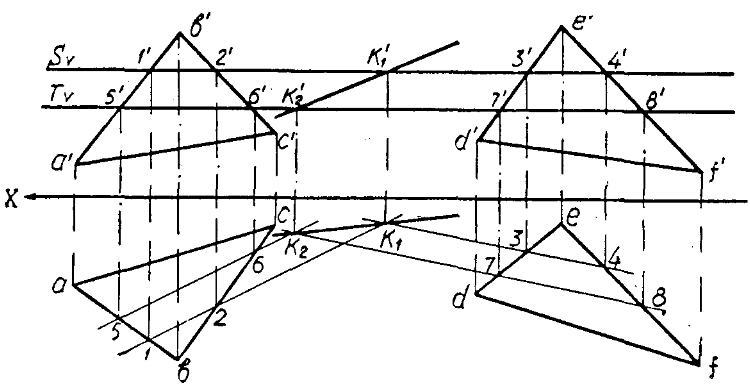


Рис. 202.

вспомогательной горизонтальной плоскости T. Линия, проходящая через точки K_1 и K_2, является искомой линией пересечения двух плоскостей.

Способ построения линии пересечения двух плоскостей при помощи дополнительных секущих плоскостей применим также и в тех случаях, когда обе плоскости заданы следами.

На рис. 203 одна точка линии пересечения плоскостей P и Q (точка M) найдена в точке пересечения горизонтальных следов плоскости, а вторая точка (точка N) — при помощи дополнительной секущей горизонтальной плоскости T.

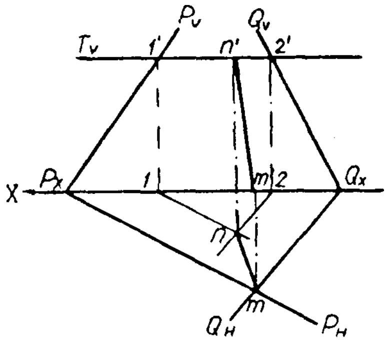


Рис. 203.

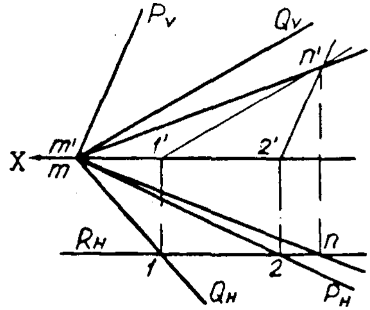


Рис. 204.

На рис. 204 показано построение линии пересечения двух плоскостей P и Q, имеющих общую точку схода следов. Одной точкой линии пересечения двух плоскостей будет служить точка схода следов, вторая точка может быть найдена при помощи вспомогательной секущей фронтальной плоскости R.

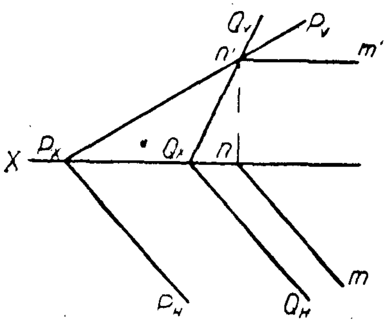


Рис. 205.

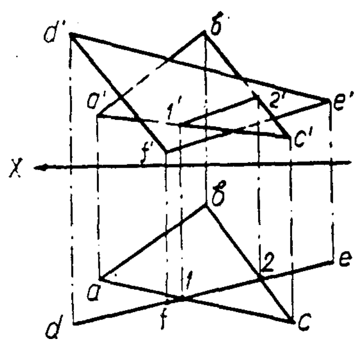


Рис. 206.

На рис. 205 дано построение линии пересечения плоскостей P и Q с параллельными между собой горизонтальными следами. Эти две плоскости пересекаются по общей горизонтали, которая пройдет через точку N, определяемую пересечением P_v и Q_v.

В тех случаях, когда одна из заданных пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, построение линии пересечения их значительно упрощается.

На рис. 206 одна из заданных плоскостей (плоскость треугольника DEF) является горизонтально-проецирующей. Построение линии пересечения этих плоскостей свелось к построению фронтальных проекций 1 и 2, принадлежащих искомой линии.

§ 21. Взаимное положение прямой линии и плоскости

Возможны следующие три случая относительного расположения прямой линии и плоскости..

1. Прямая принадлежит плоскости;
2. Прямая параллельна плоскости;
3. Прямая пересекает плоскость.

Первому случаю был посвящен § 18, в котором рассматривалась принадлежность прямой данной плоскости.

При решении вопроса о параллельности прямой линии и плоскости необходимо опираться на известное положение стереометрии: *прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.*

Пример 1. Через точку A (рис. 207) провести прямую, параллельную плоскости P.

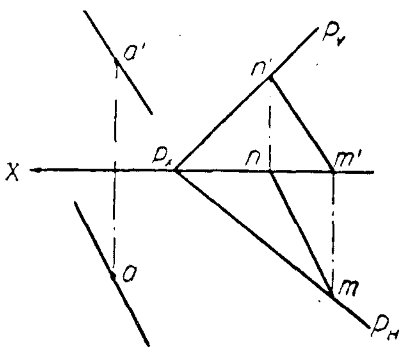


Рис. 207.

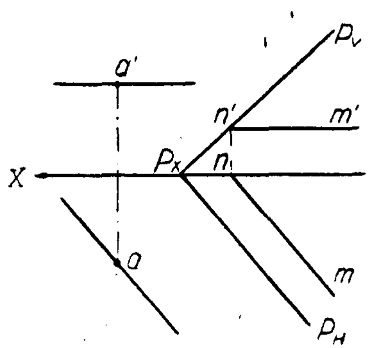


Рис. 208.

Решение. Через точку параллельно плоскости можно провести множество прямых, поэтому эта задача не будет иметь единственного решения. Возьмем в плоскости P какую-либо прямую MN и через фронтальную проекцию a' проведем прямую, параллельную $m'n'$, а через горизонтальную проекцию a — прямую, параллельную mn.

Пример 2. Через точку A (рис. 208) провести прямую, параллельную плоскости P и плоскости проекций H.

Решение. В данном случае искомая прямая должна быть параллельна прямой, лежащей в плоскости P и параллельной плоскости проекций H. Такой прямой в плоскости P будет являться ее горизонталь MN.

Пример 3. Через точку M (рис. 209) провести прямую, параллельную плоскости, заданной треугольником ABC и плоскости проекций H.

Решение аналогично предыдущему и ясно из рис. 209.

Пример 4. Через прямую AB (рис. 210) провести плоскость, параллельную прямой CD.

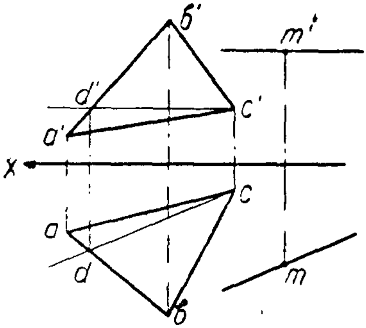


Рис. 209.

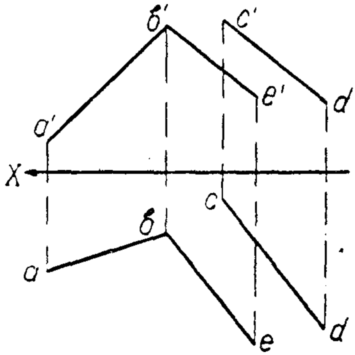


Рис. 210.

Решение. Через точку B проведем вспомогательную прямую BE параллельно прямой CD. Две пересекающиеся прямые AB и BE определяют плоскость, которая будет параллельна прямой CD, т. к. прямая BE, лежащая в этой плоскости, будет параллельна прямой CD.

Если требуется определить, параллельна ли данная прямая данной плоскости, то надо будет провести в этой плоскости некоторую прямую параллельно данной прямой. Если прямая, построенная в плоскости, окажется параллельной данной прямой, то заданные прямая и плоскость взаимно параллельны.

Определение точки пересечения прямой с плоскостью является одной из основных задач начертательной геометрии. От того, насколько хорошо она будет усвоена, зависит успешное изучение последующего материала.

Эта задача постоянно будет встречаться при изучении вопросов пересечения прямой с многогранником, пересечения многогранника, конуса, цилиндра и любой линейчатой поверхности с плоскостью, пересечения двух многогранников и т. д.

Рассмотрим вначале пересечение прямой линии с проецирующими плоскостями.

На рис. 211 показано определение точки пересечения прямой AB с горизонтально-проецирующей плоскостью S. Так как плоскость S горизонтально-проецирующая, то по свойству проецирующих плоскостей горизонтальные проекции всех точек, лежащих в ней, должны лежать на горизонтальном следе $S_н$. Горизонтальная проекция точки пересечения прямой AB с плоскостью S также должна лежать на горизонтальном следе плоскости S. Поэтому данная задача сводится к определению вначале горизонтальной проекции k (пересечение горизонтальной проекции прямой с горизонтальным следом плоскости) и затем по линии связи — фронтальной проекции k'.

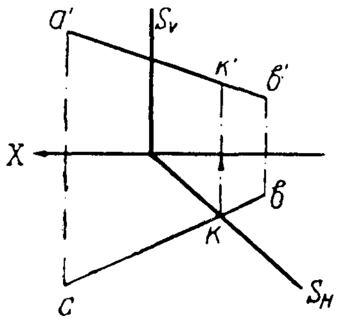


Рис. 211.

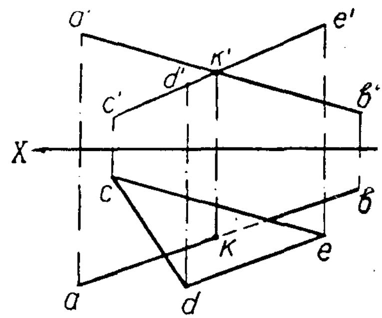


Рис. 212.

На рис. 212 показано определение точки пересечения прямой AB с плоскостью треугольника CDE.

Так как плоскость треугольника CDE фронтально-проецирующая, фронтальная проекция точки пересечения прямой с плоскостью определится в пересечении их фронтальных проекций.

Горизонтальная проекция искомой точки определится по линии связи.

Для определения точки пересечения прямой линии с плоскостью общего положения надо предварительно произвести следующие вспомогательные построения (рис. 213):

1) Через данную прямую (AB) провести некоторую вспомогательную плоскость (S);

2) Построить прямую (MN) пересечения данной плоскости (P) и вспомогательной (S);

3) Определить точку пересечения прямой (AB) с линией пересечения двух плоскостей (MN).

На рис. 214 на чертеже показано определение точки пересечения прямой AB с плоскостью общего положения P.

Для этого через прямую AB проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость S. В качестве вспомогательной плоскости можно использовать любую плоскость, в том числе и плоскость общего положения. Однако для простоты построения взята именно проецирующая плоскость, проведение которой не требует дополнительных построений. Горизонтальный след $S_н$ этой плоскости пройдет через горизонтальную проекцию ab данной прямой, а фронтальный след будет перпендикулярен оси проекций.

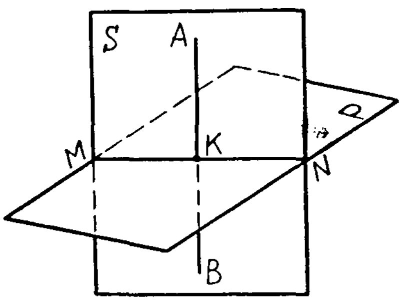


Рис. 213.

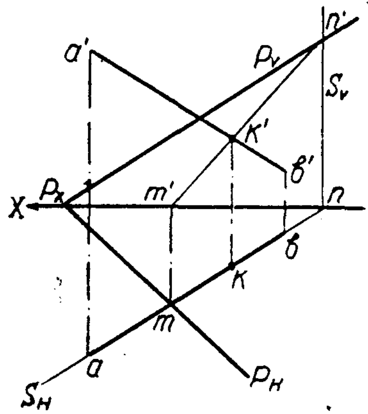


Рис. 214.

Затем определена линия пересечения MN плоскостей P и S и определена точка k' — фронтальная проекция искомой точки. Горизонтальная проекция k определится по линии связи.

На рис. 215 показано определение точки пересечения прямой MN с плоскостью треугольника ABC.

Через прямую MN проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость S, затем определена линия пересечения 1—2 двух плоскостей и, наконец, определена искомая точка K.

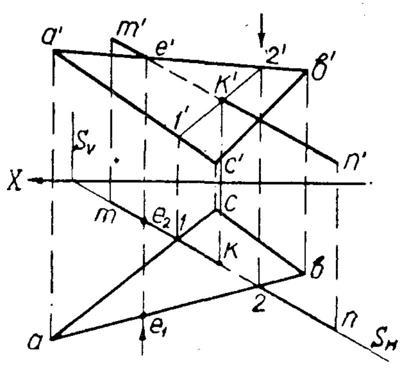


Рис. 215.

Ограничиваясь при рассмотрении плоскости контуром данного треугольника (т. е. считая, что в пространстве заданы прямая и непрозрачный треугольник), определим видимость прямой MN относительно плоскостей проекций H и V.

Вопрос о видимости линий или поверхностей всегда может быть сведен к вопросу о видимости точек. Если несколько точек находятся на общей для них линии связи, то видимой будет только одна из них — наиболее удаленная от той плоскости проекций, по отношению к которой определяется видимость. Точки, расположенные на одной линии связи, называются *конкурирующими.*

Возьмем на фронтальной проекции точку e', где пересекаются фронтальные проекции прямой MN и стороны AB треугольника ABC. Из точки e' проведем вниз линию связи и на горизонтальной проекции отметим точку e_1, лежащую на ab, и точку e_2, лежащую на mn. Точка e_1 находится дальше от плоскости V и, следовательно, на фронтальной проекции она будет видима. Точка e_2, а, значит, и отрезок $e'k'$ на фронтальной проекции будут невидимы.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций возьмем точку 2, в которой пересекаются горизонтальные проекции прямой MN и стороны треугольника AB. Из рассмотрения их фронтальных проекций видим, что на данном участке прямая AB находится дальше от плоскости H и, следовательно, на горизонтальной проекции отрезок $k2$ будет невидим.

§ 22. Прямая линия, перпендикулярная к плоскости

Из геометрии известно, что *прямая, перпендикулярная к плоскости, будет перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.*

В качестве таких прямых в начертательной геометрии взяты горизонталь и фронталь плоскости, т. к. их построение на чертеже не представляет трудности.

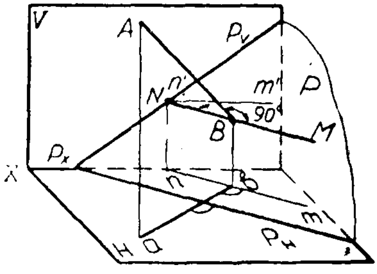


Рис. 216.

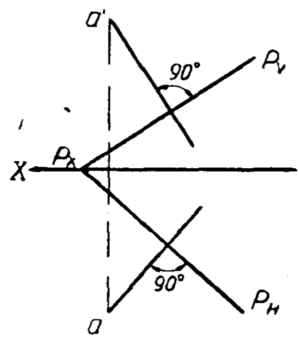


Рис. 217.

На рис. 216 прямая AB перпендикулярна к плоскости P, следовательно, она будет перпендикулярна и к прямой NM, которая является горизонталью плоскости P.

Если угол ABM прямой и BM параллельна плоскости H, то и угол abm также прямой — на основании свойств проекций прямого угла.

Отсюда можно сделать вывод: *если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее горизонтальная проекция будет перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости.*

Так как горизонтальный след плоскости $P_н$ параллелен горизонтальной проекции горизонтали, то *горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной к плоскости, будет перпендикулярна и к горизонтальному следу плоскости.*

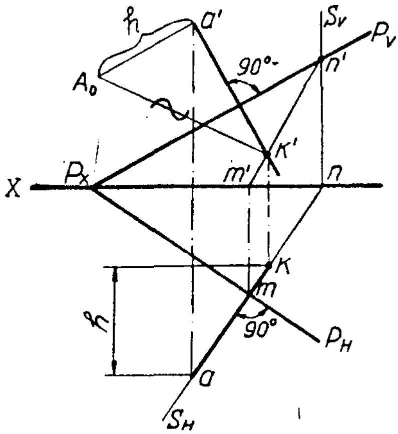


Рис. 218.

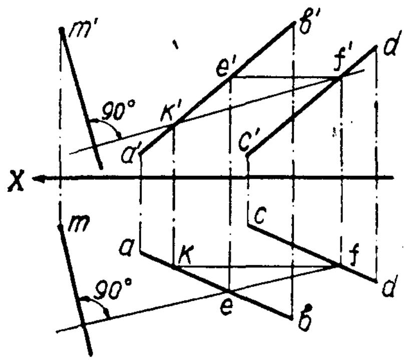


Рис. 219.

Аналогичными рассуждениями легко доказать, что *фронтальная проекция прямой, перпендикулярной к плоскости, будет перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали и к фронтальному следу этой плоскости.*

На рис. 217 дан чертеж прямой AB, перпендикулярной к плоскости P.

Пример 1. Определить расстояние от точки A до плоскости P (рис. 218).

Р е ш е н и е. Расстояние от точки A до плоскости P определится величиной перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость. Фронтальная проекция этого перпендикуляра будет перпендикулярна к фронтальному следу P_v, а горизонтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна к горизонтальному следу $P_н$ этой плоскости.

Далее определим точку встречи (точку пересечения) перпендикуляра с плоскостью. Для этого через перпендикуляр проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость S, найдена линия пересечения плоскостей P и S и определена точка K.

Натуральная величина расстояния от точки A до плоскости P (A_0k') определена методом прямоугольного треугольника.

Пример 2. Из точки M опустить перпендикуляр на плоскость, определяемую двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 219).

Решение. Строим проекции перпендикуляра, не находя следов данной плоскости. Проводим в плоскости, определяемой двумя параллельными прямыми AB и CD, одну из ее горизонталей (EF) и одну из фронталей (KF). Теперь проведем фронтальную проекцию перпендикуляра из m' перпендикулярно к $k'f'$, а горизонтальную проекцию перпендикуляра из m перпендикулярно к ef.

Пример 3. Через данную точку A провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой BC (рис. 220).

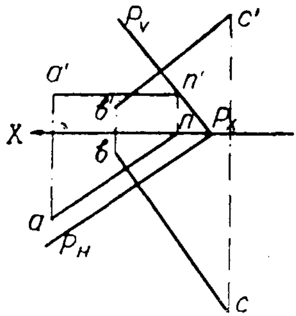


Рис. 220.

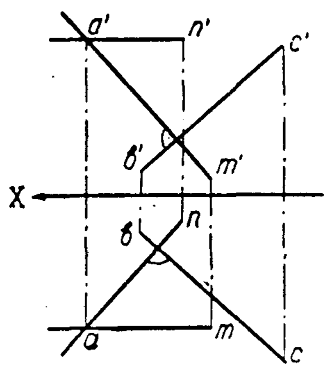


Рис. 221.

Решение. Следы искомой плоскости должны быть перпендикулярны к одноименным проекциям прямой BC. Так как направление следов известно, то известно и направление главных линий этой плоскости. Поэтому через точку A вначале проведена горизонталь AN. Горизонтальная проекция горизонтали an пройдет через a перпендикулярно к bc, фронтальная проекция $a'n'$ пройдет параллельно оси проекций X. Определив фронтальный след горизонтали n', проведем через него след P_v перпендикулярно к $b'c'$. Через точку схода P_x проводим след $P_н$ перпендикулярно к bc.

Пример 4. Выполнить такое же построение, как в примере 3, не выражая плоскость следами (рис. 221).

Решение. Искомая плоскость выражена двумя пересекающимися прямыми, одна из которых (AN) является горизонталью искомой плоскости (горизонтальная проекция ее проведена перпендикулярно к горизонтальной проекции заданной прямой), а вторая (AM) — фронталью искомой плоскости (фронтальная проекция ее проведена перпендикулярно к фронтальной проекции заданной прямой).

§ 23. Построение взаимно перпендикулярных прямых общего положения

Положим, что надо опустить перпендикуляр из точки A на прямую общего положения BC (рис. 222). Построение основано на том, что перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к каждой прямой, проведенной в этой плоскости. Поэтому можно наметить такой план построения проекций искомой прямой:

1) через точку A проведем плоскость Q, перпендикулярную к BC;

2) определим точку K пересечения прямой BC с плоскостью Q;

3) соединим точки A и K отрезком прямой линии.

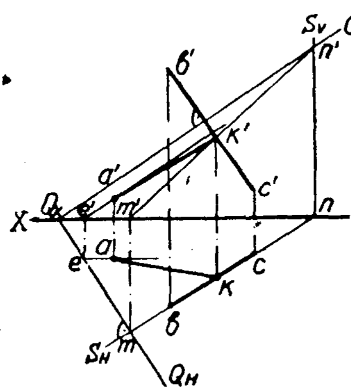


Рис. 222.

Проведем через точку A плоскость Q перпендикулярно к прямой BC. Для этого через точку A проводим фронталь плоскости Q (фронтальная проекция фронтали $e'a' \perp b'c'$). Определив горизонтальный след фронтали, через него проводим горизонтальный след $Q_н \perp bc$. Фронтальный след Q_v пройдет через точку схода следов Q_x перпендикулярно к $b'c'$. Далее определим точку пересечения прямой BC с плоскостью Q. Для этого через прямую BC проведем вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость S, найдем линию пересечения MN плоскостей Q и S и определим точку K. Соединим полученную точку K с точкой A. AK будет искомым перпендикуляром.

§ 24. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Построение взаимно перпендикулярных плоскостей может быть осуществлено двумя способами:

1) искомая плоскость проводится через прямую, перпендикулярную к заданной плоскости;

2) искомая плоскость проводится перпендикулярно к прямой, лежащей в заданной плоскости.

Пример 1. Через прямую AB провести плоскость, перпендикулярную к плоскости P (рис. 223).

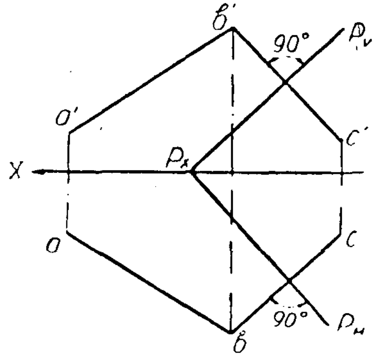


Рис. 223.

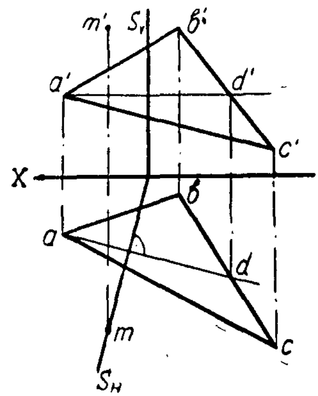


Рис. 224.

Решение. Из точки B опустим перпендикуляр на плоскость P. Фронтальная проекция этого перпендикуляра $b'c'$ будет перпендикулярна к фронтальному следу P_v, а горизонтальная проекция — перпендикулярна к горизонтальному следу $P_н$ данной плоскости. Две пересекающиеся прямые AB и BC определяют искомую плоскость.

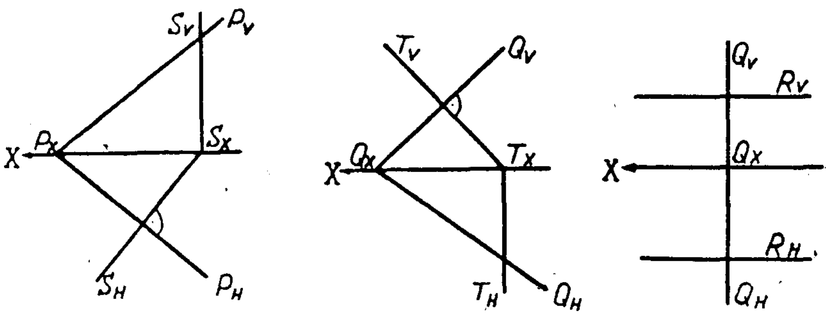


Рис. 225.

Пример 2. Через точку M провести плоскость, перпендикулярную к плоскости проекций H и к плоскости треугольника ABC (рис. 224).

Решение. Чтобы было соблюдено первое условие ($S \perp H$), искомая плоскость должна быть горизонтально-проецирующей, а чтобы быть перпендикулярной к плоскости треугольника ABC, она должна быть перпендикулярна к одной из прямых, лежащих в плоскости треугольника ABC. Наиболее удобной прямой в плоскости треугольника ABC будет ее горизонталь AD. Поэтому проведем вначале горизонталь AD в плоскости треугольника ABC, а затем через точку M проведем горизонтально-проецирующую плоскость S перпендикулярно к горизонтали AD. Плоскость S — искомая.

Необходимо отметить, что *у взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения их одноименные следы никогда не перпендикулярны между собой.*

Если же одна из заданных плоскостей (или обе) являются плоскостями частного положения, то взаимная перпендикулярность на чертеже одной пары их следов свидетельствует о перпендикулярности плоскостей в пространстве (рис. 225).

§ 25. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называют угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

На рис. 226 угол α искомый. Для его нахождения на чертеже следует произвести следующие построения:

1) Определить точку K пересечения прямой AB с плоскостью P;

2) Из точки A на плоскость P опустить перпендикуляр;

3) Определить точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью P;

4) Соединить точки a и K отрезком прямой линии.

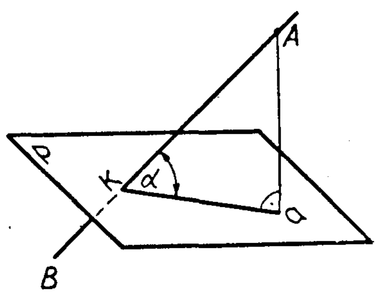


Рис. 226.

§ 26. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями — это двугранный угол, который измеряется линейным углом, полученным при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения данных плоскостей.

На рис. 227 угол α искомый. Для определения его проекций на чертеже надо произвести следующие построения:

1) определить линию пересечения (MN) заданных плоскостей P и Q;

2) через произвольную точку B, взятую на MN, провести вспомогательную плоскость S перпендикулярно к линии пересечения MN;

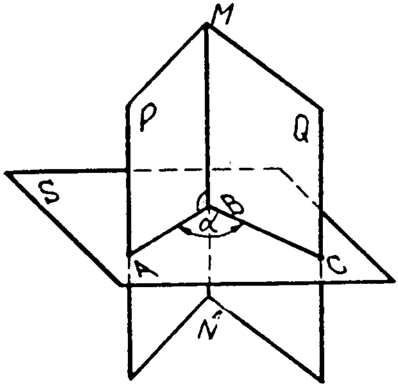


Рис. 227.

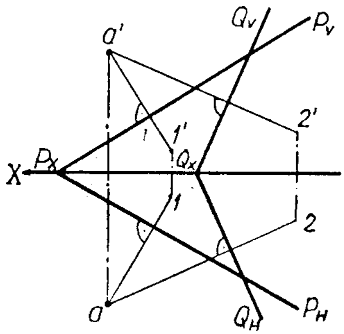


Рис. 228.

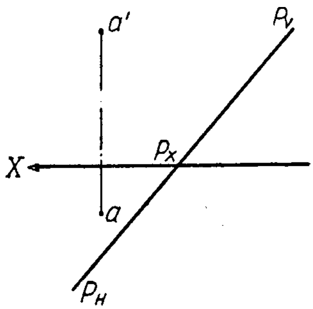


Рис. 229.

3) определить линии пересечения плоскостей P и S и плоскостей Q и S.

В тех случаях, когда требуется лишь определить величину угла между двумя плоскостями, построения на чертеже значительно упрощаются. На рис. 228 для определения угла между плоскостями P и Q выбираем произвольную точку A, и из нее на обе плоскости опускаем перпендикуляры $A1$ и $A2$. Угол между этими перпендикулярами и будет искомым. Если этот угол получится тупым, то угол между двумя плоскостями определится разностью между углом 180° и найденным.

Истинную величину угла можно определить одним из способов преобразования проекций, о которых будет сказано ниже.

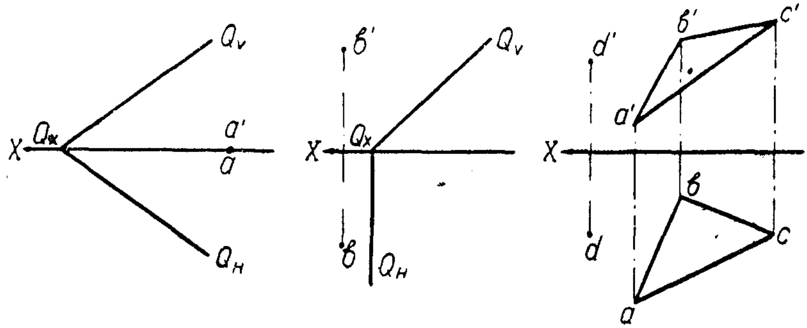


Рис. 230.

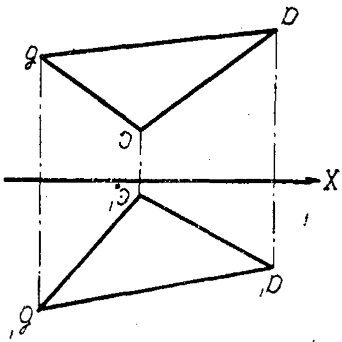


Рис. 231.

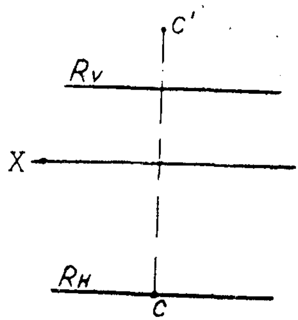


Рис. 232.

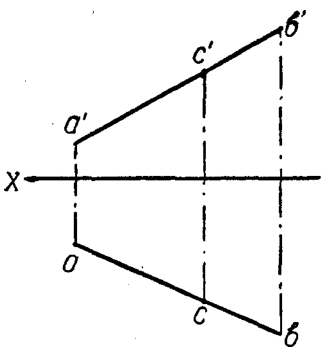


Рис. 233.

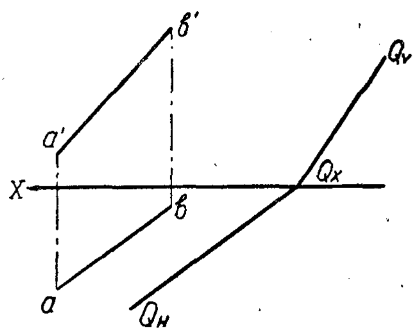


Рис. 234.

Для закрепления данной темы рекомендуется решить следующие задачи.

1. Через точку A провести прямую, параллельную плоскости P (рис. 229).

2. Из данной точки на данную плоскость опустить перпендикуляр и найти его основание (рис. 230).

3. Через вершину A треугольника ABC провести плоскость P общего положения, перпендикулярную к плоскости треугольника ABC (рис. 231).

4. Через точку C провести плоскость, параллельную данной профильно-проецирующей плоскости R (рис. 232).

5. Через точку C провести плоскость, перпендикулярную к прямой AB (рис. 233).

6. Через прямую AB провести плоскость, перпендикулярную к плоскости Q (рис. 234).

Глава 6

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

§ 27. Общие понятия

Если прямые линии или плоские фигуры находятся в частных положениях относительно плоскостей проекций, то это значительно упрощает решение метрических или позиционных задач, а иногда позволяет получить ответ непосредственно по данному чертежу или при помощи простейших построений.

Изображенная на рис. 235 горизонтальная прямая AB позволяет непосредственно по чертежу определить натуральную величину отрезка AB (она будет равна по величине горизонтальной проекции этого отрезка) и угол β наклона этого отрезка к плоскости проекций V.

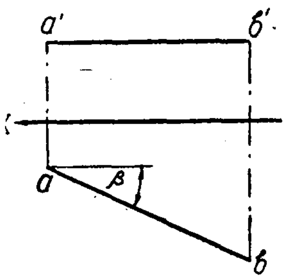


Рис. 235.

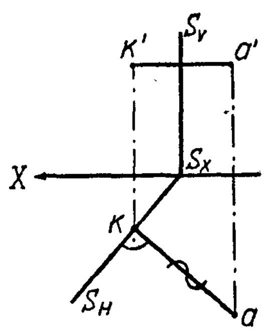


Рис. 236.

Для определения расстояния от точки A до горизонтально-проецирующей плоскости S (рис. 236) достаточно из горизонтальной проекции точки опустить перпендикуляр на горизонтальный след $S_н$ данной плоскости. Искомое расстояние определится отрезком ak.

Как же решать задачи в том случае, если геометрические элементы находятся в общем положении относительно плоскостей проекций?

Ответ на этот вопрос следующий: в данном случае надо прибегнуть к построениям новых вспомогательных проекций, упрощающих решение той или иной задачи. В одном случае необходимо переместить геометрические элементы в частное положение относительно плоскостей проекций (*способ вращения вокруг осей, перпендикулярных или параллельных плоскостям проекций*), в другом — заменить систему плоскостей проекций новой системой так, чтобы геометрические элементы относительно новой системы плоскостей проекций оказались бы в частном положении (*способ перемены плоскостей проекций*).

Как выполнить эти преобразования на чертеже, перейти от заданных проекций к новым, полученным в результате поворота проецируемого предмета или перемены плоскостей проекций, и рассматривается ниже.

§ 28. Способ вращения

Сущность способа вращения заключается в том, что заданная геометрическая фигура путем вращения вокруг некоторой оси перемещается в пространстве до тех пор, пока она не займет частное положение по отношению к неизменной системе плоскостей проекций.

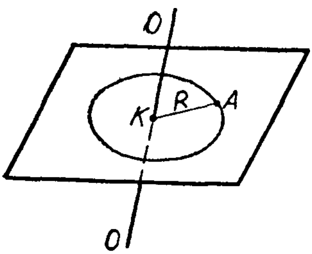


Рис. 237.

Точка A (рис. 237), вращаясь вокруг оси OO, опишет окружность, плоскость которой P перпендикулярна к OO.

Центр окружности K будет расположен в точке пересечения оси вращения OO с плоскостью P (в которой вращается точка), а величина радиуса R определится как расстояние от точки A до оси вращения. Ось вращения может быть задана или выбрана; в последнем случае выгодно расположить ось перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, т. к. при этом упрощаются построения.

§ 29. Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

Если точка A (рис. 238) вращается вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости H, то она будет перемещаться по окружности в плоскости Q, перпендикулярной к оси вращения. На плоскость H траектория движения этой точки будет проецироваться без искажения, а на плоскость V она будет проецироваться на след Q_V, который параллелен оси проекций X.

Чертеж дан на рис. 239. Окружность, описанная точкой A при вращении ее вокруг оси OO, спроецирована без искажения на плоскость H. Из точки o, как из центра, проведена окружность радиуса $R = oa$, на плоскость V траектория движения точки спроецируется в виде прямой, параллельной оси X.

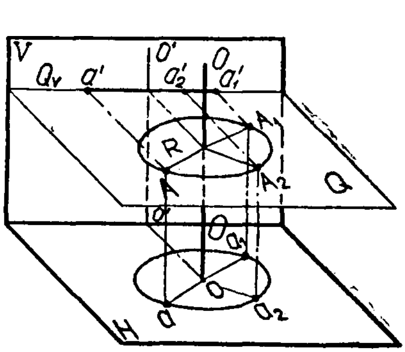


Рис. 238.

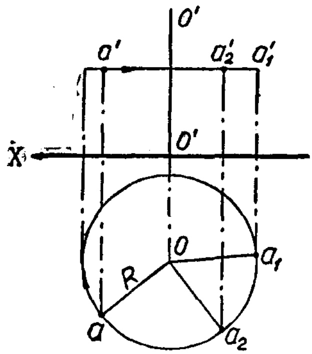


Рис. 239.

При перемещении точки из положения A в положение A_1 горизонтальная проекция этой точки переместится по дуге окружности в положение a_1, а фронтальная проекция точки переместится в положение a_1' по прямой, параллельной оси X.

При вращении какой-либо точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V, фронтальная проекция этой точки будет перемещаться по дуге окружности, а горизонтальная — по прямой, параллельной оси проекций X.

Из сказанного можно сделать вывод: *при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, одна из проекций вращаемой точки перемещается по окружности* (в плоскости, перпендикулярной к оси вращения), *а другая проекция перемещается по прямой, параллельной соответствующей оси проекций.*

Пример 1. Точку A (рис. 240) повернуть вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости H, на угол α по направлению вращения часовой стрелки.

Решение: Из точки o, как из центра, радиусом, равным отрезку oa, повернем точку a на угол α. Точка a_1 будет новой горизонтальной проекцией точки A. Для нахождения фронтальной проекции точки A после поворота достаточно из точки a_1 провести линию связи до пересечения в точке a_1' с направлением перемещения фронтальной проекции, которое будет параллельным оси проекций X.

Пример 2. Вращением вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости V, повернуть точку B так, чтобы после поворота она оказалась в плоскости H (рис. 241).

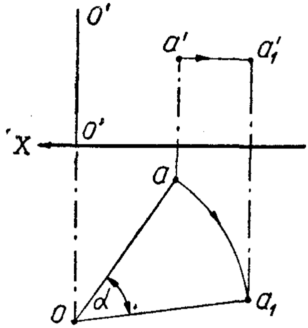


Рис. 240.

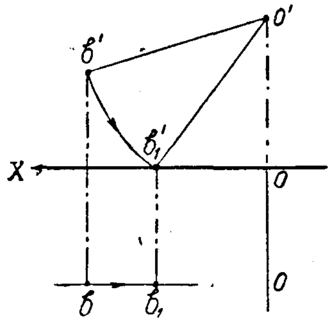


Рис. 241.

Решение: Из центра o', радиусом, равным $o'b'$, повернем проекцию b' до совмещения с осью X (т. к. фронтальные проекции точек, лежащих в плоскости H, должны лежать на оси X). Горизонтальную проекцию точки B после поворота b_1 определим, проведя линию связи из b_1' до пересечения с направлением перемещения горизонтальной проекции точки, параллельном оси проекций X.

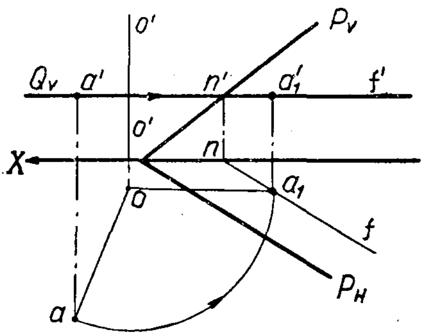


Рис. 242.

Пример 3. Вращением вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости H, совместить точку A с плоскостью P (рис. 242).

Решение. При вращении вокруг оси OO точка A опишет окружность в плоскости Q, перпендикулярной к оси вращения OO.

Горизонтальная плоскость Q пересечет заданную плоскость по горизонтали NF.

Очевидно, точка A окажется в плоскости P тогда, когда окружность, описываемая точкой A, пересечет горизонталь NF.

§ 30. Вращение отрезка прямой линии вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

Чтобы повернуть прямую AB (рис. 243) на некоторый угол α, достаточно повернуть на заданный угол две принадлежащие ей точки. Построение проекций нового положения отрезка AB после его поворота видно на чертеже.

Из чертежа видно, что треугольники aob и a_1ob_1 равны между собой, т. к. радиусы поворота точек a и b не изменяют своей величины после поворота; не изменится и угол, составленный этими радиусами, т. к. оба радиуса поворачиваются на один и тот же угол α.

Из равенства этих треугольников следует, что $ab=a_1b_1$, т. е. величина горизонтальной проекции отрезка при вращении его вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H, не изменится, изменится только ее положение относительно оси

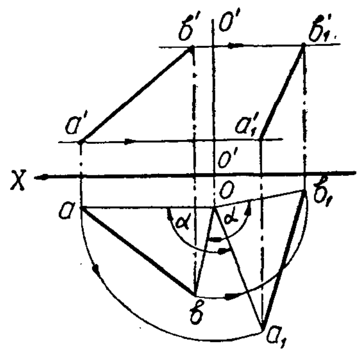


Рис. 243.

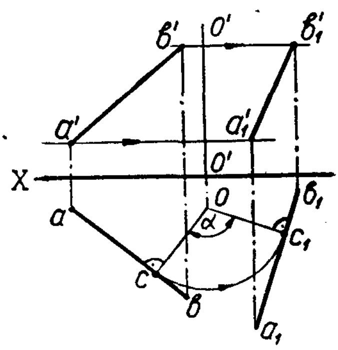


Рис. 244.

проекций; поэтому построения при решении этого примера можно упростить (рис. 244). Для поворота отрезка прямой AB вокруг оси OO на угол α из o опущен перпендикуляр на ab. Затем точка c повернута на заданный угол α, через точку c_1 проведена прямая, перпендикулярная к радиусу c_1o и отложены отрезки $c_1a_1=ca$ и $c_1b_1=cb$. Нахождение нового положения фронтальной проекции $a_1'b_1'$ остается прежним.

Указанным способом можно не только повернуть отрезок на заданный угол, но и определить угол, на который надо повернуть заданный отрезок, чтобы придать ему частное положение (расположить параллельно или перпендикулярно к плоскостям проекций).

Рассмотрим это на следующих примерах.

Пример 1. Определить величину отрезка AB вращением его вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H (рис. 245).

Решение. Из точки o опустим перпендикуляр на проекцию ab и повернем отрезок oc в положение, перпендикулярное оси X. Через c_1 проведем прямую, перпендикулярную oc_1 и от точки c_1 отложим отрезки $c_1a_1=ca$ и $c_1b_1=cb$, получим новое положение горизонтальной проекции отрезка a_1b_1, параллельное оси проекций X.

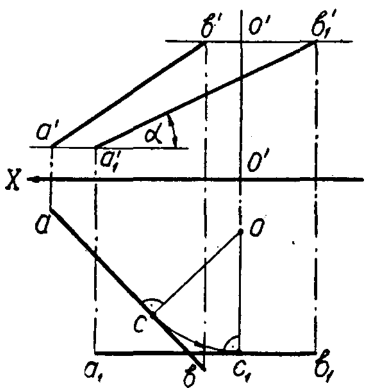


Рис. 245.

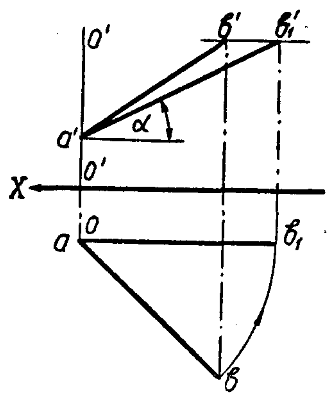


Рис. 246.

Для определения фронтальной проекции нового положения этого отрезка проводим направления перемещений фронтальных проекций концов отрезка, параллельное оси X, и по линиям связи, проведенным из a_1 и b_1, определим a_1' и b_1'.

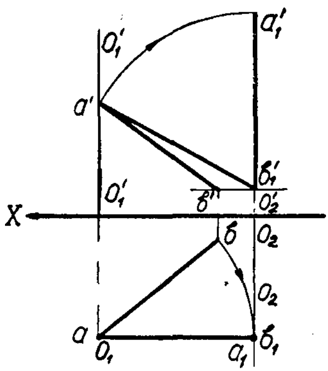


Рис. 247.

Соединив a_1' и b_1', получим фронтальную проекцию отрезка после поворота; она и будет выражать натуральную величину отрезка AB. Одновременно определим угол α, показывающий наклон отрезка прямой AB к плоскости H.

Пример 2. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, определить натуральную величину отрезка AB (рис. 246).

Решение. Если ось вращения провести через один из концов этого отрезка, то построение упростится, т. к. необходимо будет повернуть только одну точку — другой конец этого отрезка; точка же, через которую пройдет ось вращения, останется на месте.

Выбираем ось вращения, проходящую через точку A, перпендикулярно к плоскости H. С центром в точке a повернем горизонтальную проекцию ab в положение, параллельное оси X. Для определения нового положения фронтальной проекции точки B проведем через проекцию b' направление ее перемещения и по линии связи определим b_1'. Проекция $a'b_1'$ будет выражать натуральную величину отрезка прямой AB, т. к. после поворота он окажется параллельным плоскости V. Угол α, составленный проекцией $a'b_1'$ и осью X, будет показывать наклон прямой AB к плоскости H.

Пример 3. Отрезок AB (рис. 247) повернуть так, чтобы он оказался перпендикулярным к плоскости H.

Решение. В данном случае за один поворот невозможно поставить отрезок AB перпендикулярно к плоскости H, т. к. он находится в общем положении относительно плоскостей проекций. Поэтому вначале поворотом вокруг оси O_1O_1, перпендикулярной к плоскости H и проходящей через точку A, поставим этот отрезок в положение, параллельное плоскости V; новое положение проекций обозначено ab_1 и $a'b_1'$.

Вторую ось вращения O_2O_2 выберем перпендикулярно к плоскости V и проходящую через новое положение точки B (b_1, b_1'). Поворачивая фронтальную проекцию $a'b_1'$ до положения $a_1'b_1'$, приводим отрезок в положение, перпендикулярное к плоскости H. Горизонтальная проекция изобразится точкой.

§ 31. Вращение плоскости вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

Вращение плоскости вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, осуществляется путем вращения на один и тот же угол в одном и том же направлении точек и прямых, которыми задана плоскость.

На рис. 248 плоскость, заданная треугольником ABC, повернута вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости H и проходящей через вершину треугольника A, в положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций V. Для этого в плоскости треугольника ABC проведена горизонталь AK и затем горизонтальная проекция треугольника повернута вокруг выбранной оси до положения, когда горизонтальная проекция горизонтали станет перпендикулярной к оси X. Фронтальная проекция треугольника $c_1'a'b_1'$ выразится прямой линией.

После поворота плоскость треугольника займет положение фронтально-проецирующей плоскости, т. к. прямая AK, лежащая в плоскости треугольника, будет перпендикулярна к плоскости проекций V (по условию перпендикулярности двух плоскостей).

Если плоскость задана следами, то для поворота плоскости на некоторый угол необходимо повернуть на заданный угол один из ее следов и горизонталь или фронталь этой плоскости.

На рис. 249 показан поворот плоскости общего положения P, заданной следами, на угол α вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H. Из точки o опустим перпендикуляр ok на горизонтальный след $P_н$ и затем повернем этот перпендикуляр на угол α.

Через полученную точку k_1 проведем прямую линию, перпендикулярную к ok_1, и получим новое положение горизонтального следа плоскости $P_{н_1}$.

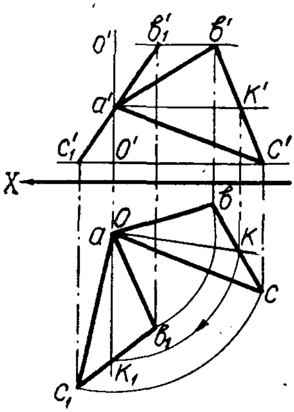


Рис. 248.

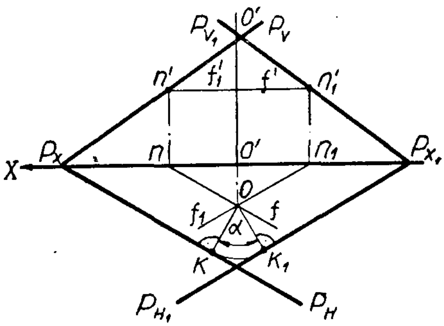


Рис. 249.

Для нахождения нового фронтального следа плоскости достаточно найти, помимо найденной новой точки схода следов P_{x_1}, еще одну точку, принадлежащую новому положению фронтального следа плоскости.

Для этого в плоскости P проведена горизонталь NF, (nf, $n'f'$), пересекающая ось вращения OO (nf проходит через горизонтальную проекцию оси вращения).

Так как горизонталь и после поворота плоскости должна проходить параллельно горизонтальному следу, проводим через точку o прямую, параллельную $P_{н_1}$ — это будет новое положение горизонтальной проекции горизонтали. Фронтальная проекция горизонтали не изменит своего направления, а поэтому легко найти новый фронтальный след горизонтали — точку n_1'.

Проведя через точки n_1' и P_{x_1} прямую, получим новое положение фронтального следа P_{v_1}.

Если ось вращения расположена в плоскости проекций, то при вращении плоскости вокруг этой оси построение значительно упрощается.

На рис. 250 плоскость P повернута вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости H и расположенной в плоскости V до положения фронтально-проецирующей плоскости.

Так как одна из точек фронтального следа плоскости оказывается расположенной на оси вращения, то после поворота плоскости, новый фронтальный след должен пройти через эту точку.

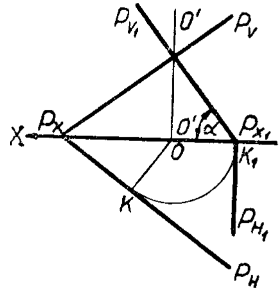


Рис. 250.

Поэтому, определив новое положение горизонтального следа P_{H_1}, проведем след P_{V_1} через новую точку схода следов P_{V_1} и точку пересечения следа P_V с проекцией оси вращения. Угол между следом P_{V1} и осью X будет показывать наклон плоскости P к плоскости H.

Очевидно, для определения угла наклона плоскости P к плоскости V надо повернуть плоскость P до положения, перпендикулярного к плоскости H, вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V.

§ 32. Способ плоско-параллельного перемещения

Вращение точки или фигуры вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, можно рассматривать как частный случай более общего вида перемещения — параллельного плоскостям проекций.

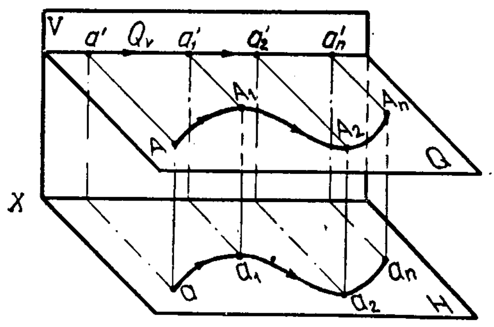


Рис. 251.

Возьмем в плоскости Q (рис. 251), параллельной плоскости H, точку A и будем перемещать ее в этой плоскости по какой-либо траектории $A—A_n$. Как будут меняться положения проекций этой точки при таком перемещении? Вероятно, горизонтальная проекция этой точки будет перемещаться по такой же траектории, как и точка A в плоскости Q, а фронтальная проекция — по фронтальному следу Q_v, т. е. по прямой, параллельной оси X. Следовательно, не только при вращении, т. е. при движении по окружности, но и при всяком перемещении точки параллельно плоскости H фронтальная проекция ее будет перемещаться параллельно оси X.

Поэтому при решении некоторых задач можно несколько упростить графические построения, не привязывая проекции к определенным осям вращения, а перемещая их так, как это окажется удобным, чтобы избежать наложения одной проекции на другую.

Рассмотрим этот способ на конкретном примере (рис. 252).

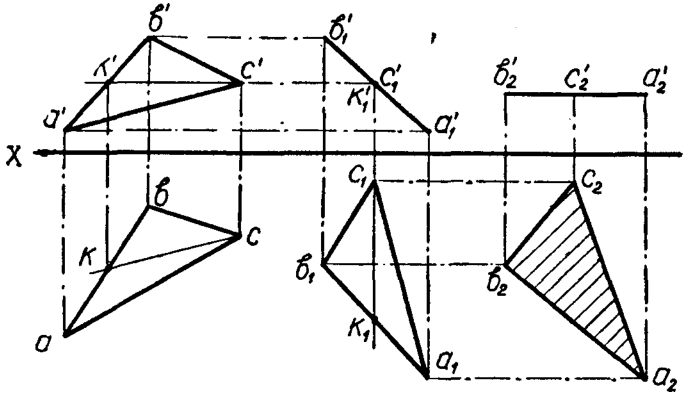


Рис. 252.

Пусть требуется определить истинный вид треугольника ABC. В плоскости треугольника проводим горизонталь KC и затем переместим горизонтальную проекцию abc в положение $a_1b_1c_1$ без изменения размеров проекции так, чтобы горизонтальная проекция горизонтали k_1c_1 оказалась перпендикулярной к оси X.

В результате такого перемещения фронтальная проекция треугольника изобразится в виде прямой линии $a_1'c_1'b_1'$, т. е. плоскость треугольника займет положение фронтально-проецирующей плоскости.

Далее фронтальную проекцию $a_1'c_1'b_1'$ перемещаем в положение, параллельное оси X, что соответствует в пространстве положению треугольника, параллельному плоскости H. Новая горизонтальная проекция $a_2b_2c_2$ будет выражать истинный вид треугольника ABC.

§ 33. Вращение плоской фигуры вокруг осей, параллельных плоскостям проекций (вокруг горизонтали или фронтали)

Любую плоскую фигуру можно повернуть вокруг горизонтали или фронтали так, чтобы после поворота она оказалась расположенной параллельно плоскости H или V.

В этом случае данная фигура спроецируется на параллельную ей плоскость в натуральную величину.

На рис. 253 показан поворот треугольника ABC вокруг горизонтали AK. При этом вращении точка A, расположенная на оси вращения, останется на месте. Следовательно, для нового изображения горизонтальной проекции треугольника надо найти положение других двух его вершин.

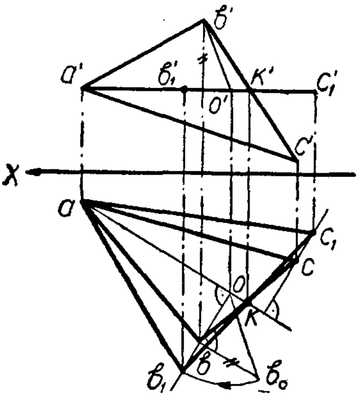


Рис. 253.

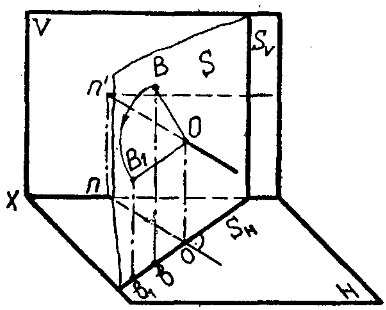


Рис. 254.

Рассмотрим отдельно поворот точки B (рис. 254). Точка B вращается вокруг горизонтальной оси On', описывая дугу окружности, лежащую в плоскости S. Эта плоскость перпендикулярна к оси вращения и, следовательно, перпендикулярна к плоскости H, т. е. является горизонтально-проецирующей плоскостью; поэтому горизонтальная проекция окружности, описываемой точкой B, должна находиться на $S_н$. Если радиус OB займет положение, параллельное плоскости H, то проекция ob_1 окажется равной OB_1, т. е. равной натуральной величине радиуса OB.

Вернемся к рис. 253. Из точки b опустим перпендикуляр на ak, найдем точку o—горизонтальную проекцию центра вращения и по линии связи найдем точку o' — фронтальную проекцию центра вращения. Отрезки ob и $o'b'$ будут являться проекциями радиуса вращения точки B. Натуральную величину радиуса вращения определим методом прямоугольного треугольника.

Таким же образом можно определить положение точки c_1, т. е. методом прямоугольного треугольника определить натуральную величину радиуса вращения точки C и отложить ее на направлении перемещения горизонтальной проекции этой точки. Однако можно не определять радиуса поворота точки C, а найти положение точки c_1 в пересечении двух прямых, из которых одна является перпендикуляром, проведенным из точки c к прямой ak, а другая проходит через найденную точку b_1 и точку k. Последняя, находясь на оси вращения, не изменит своего положения после поворота.

Новая горизонтальная проекция ab_1c_1 выражает натуральную величину треугольника ABC, так как после поворота плоскость треугольника оказалась параллельна плоскости H. Фронтальная проекция треугольника совпадет с фронтальной проекцией горизонтали. Если бы требовалось повернуть плоскую фигуру до положения, параллельного плоскости V, то за ось вращения пришлось бы принять фронталь.

§ 34. Вращение плоскости вокруг одного из ее следов до совмещения с плоскостью проекций (способ совмещения)

Если заданную плоскость P вращать около одного из ее следов до совмещения с плоскостью проекций, то отрезки линий и плоские фигуры, находящиеся в плоскости P, изобразятся без искажения на плоскости проекций, с которой совмещена плоскость P.

На рис. 255 показано совмещение плоскости P с плоскостью H, причем вращение плоскости P произведено вокруг следа $P_н$.

Для определения совмещенного положения плоскости P достаточно определить совмещенное положение фронтального следа P_v с плоскостью H, т. к. горизонтальный след $P_н$, являясь осью вращения, не изменит своего положения при вращении плоскости. Для определения же совмещенного положения следа P_{v_1} необходимо на плоскости H найти еще одну точку, которая принадлежала бы следу P_{v_1}, т. к. одна точка этого следа, точка схода следов P_x, находится на оси вращения $P_н$ и не изменит своего положения после поворота.

На следе P_v возьмем произвольную точку N и определим ее совмещенное положение. Эта точка, вращаясь вокруг следа $P_н$, будет описывать дугу окружности в плоскости Q, перпендикулярной к оси вращения. Центр этой дуги лежит в точке M, точке пересечения плоскости Q со следом $P_н$. Описывая из точки M дугу радиусом MN в плоскости Q, получим в пересечении этой дуги с $Q_н$ точку N_1; эта точка будет совмещенным положением точки N. Проведя через P_x и N_1 прямую, получим совмещенное положение следа P_{v_1}.

Построение на чертеже совмещенного положения следа P_{v_1} дано на рис. 256. Выбираем на фронтальном следе P_v произвольную точку N (n') и через ее горизонтальную проекцию n проводим прямую, перпендикулярную к оси вращения — следу $P_н$. На этой прямой nM, которая одновременно будет являться следом $Q_н$ (см. рис. 255), должна лежать точка N после совмещения ее с плоскостью H на расстоянии от точки M, равном радиусу вращения точки N. Величину радиуса вращения можно определить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами Mn и nn_1 $(nn_1 = nn')$. Делая из точки M засечку дугой радиуса Mn_1 на продолжении прямой Mn, получим совмещенное положение точки N — точку N_1.

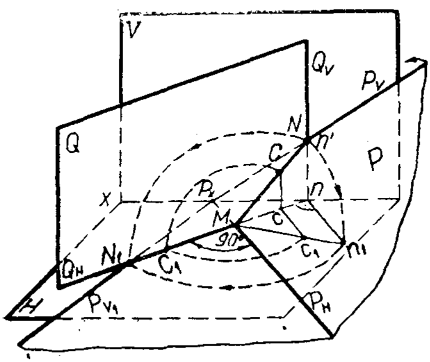


Рис. 255.

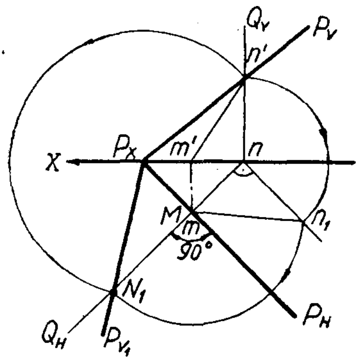


Рис. 256.

Проведя через P_x и N_1 прямую, получим совмещенное положение следа P_v — след P_{v_1}. Построение совмещенного следа P_{v_1} на чертеже можно несколько упростить. Рассмотрим два прямоугольных треугольника N_1MP_x и NMP_x (рис. 255). Они равны между собой, т. к. $N_1M = NM$ — как радиусы, а сторона P_xM у них общая. Из равенства этих треугольников следует: $P_xN_1 = P_x N$. Следовательно, можно не находить методом прямоугольного треугольника радиус поворота точки N, а просто сделать засечку из P_x радиусом $P_x n'$ на продолжении прямой nM.

Вернемся к рис. 255 и рассмотрим на нем совмещение точки C, лежащей в плоскости P, с плоскостью H. Точка C будет перемещаться по дуге окружности в плоскости Q и после совмещения с плоскостью H окажется на следе $Q_н$. Центр вращения будет лежать в точке M, радиус вращения определится как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет cM является горизонтальной проекцией радиуса вращения, а другой катет $cc_1 = Cc$ равен расстоянию от точки C до плоскости H. На чертеже построение совмещенного положения точки C показано на рис. 257. Для этого из точки c проведена прямая cm, перпендикулярная к следу $P_н$, и на ней сделана засечка радиусом mc_1, определенном методом прямоугольного треугольника по катетам mc и $cc_1 = c'c_x$. Если необходимо найти совмещенное положение отрезка прямой, лежащей в плоскости, то, найдя совмещенное положение концов этого отрезка, получим величину расстояния между этими точками, т. е. натуральную величину отрезка.

Пример. Совмещением плоскости P с плоскостью H определить натуральную величину треугольника ABC, расположенного в плоскости P (рис. 258).

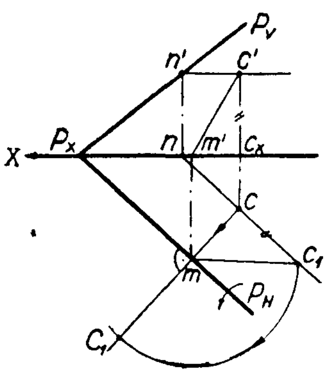


Рис. 257.

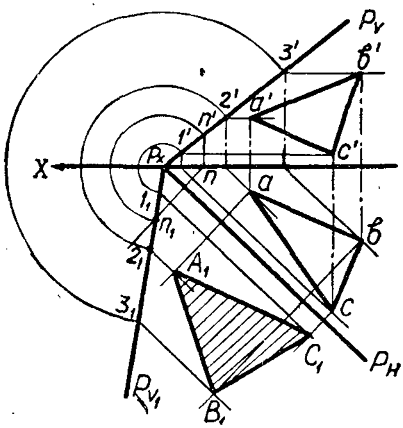


Рис. 258.

Решение. Эту задачу можно было бы решить, определив радиусы поворота вершин этого треугольника, как было сказано выше, но для упрощения решения данной задачи воспользуемся совмещенным положением горизонталей, проведенных через вершины этого треугольника, зная, что и в совмещенном положении горизонтали будут проходить параллельно горизонтальному следу плоскости.

Построим вначале совмещенный фронтальный след P_{V_1} и затем на нем определим точки 1_1, 2_1, 3_1, которые будут являть совмещенное положение фронтальных следов горизонталей, проходящих через вершины треугольника. Через полученные точки проводим совмещенные положения горизонталей параллельно $P_н$. Совмещенные положения вершин треугольника определятся в пересечении прямых, проведенных из a, b и c перпендикулярно к следу $P_н$ с соответствующими совмещенными положениями горизонталей. Треугольник $A_1B_1C_1$ будет выражать натуральную величину треугольника ABC.

При решении некоторых задач способом совмещения удобно воспользоваться совмещенным положением фронталей.

Плоскость P можно совмещать не только с плоскостью H, но также и с плоскостью V, в последнем случае осью вращения будет служить фронтальный след плоскости. Построение аналогично описанному выше.

На рис. 259 показано определение совмещенного положения точки A, расположенной в горизонтально-проецирующей плоскости S. В данном случае плоскость S совмещена с плоскостью V вращением вокруг фронтального следа S_v. Горизонтальный след S_{H_1} после совмещения расположится на оси проекций X.

На рис. 260 плоскость S совмещена с плоскостью H вращением вокруг горизонтального следа S_H. Фронтальный след S_v после совмещения будет расположен перпендикулярно к следу S_H.

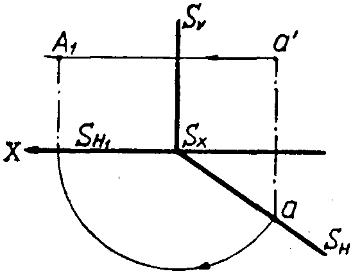


Рис. 259.

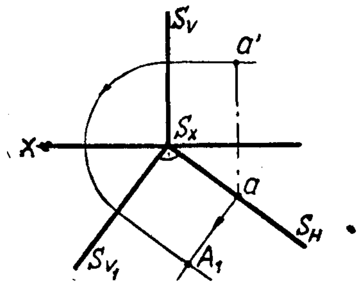


Рис. 260.

Если фронтально-проецирующую плоскость вращать вокруг ее горизонтального следа до совмещения с плоскостью H, то фронтальный след плоскости расположится на оси проекций. Если фронтально-проецирующую плоскость вращать вокруг ее фронтального следа до совмещения с плоскостью V, то горизонтальный след плоскости расположится перпендикулярно к ее фронтальному следу.

§ 35. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что положение проецируемых предметов в пространстве остается неизменным, а заменяется система плоскостей проекций на новую систему так, чтобы проецируемые предметы относительно новой системы плоскостей проекций оказались в частном положении, удобном для решения задач.

Иногда для решения задачи достаточно заменить только одну плоскость проекций; в других случаях, когда замена одной плоскости проекций не позволяет решить задачу, плоскость проекций приходится менять два или три раза.

Необходимо помнить, что нельзя менять обе плоскости проекций сразу, новая плоскость проекций должна сохранять перпендикулярность к остающейся плоскости. Замену плоскостей можно производить только в последовательном порядке: сначала заменить одну плоскость, затем другую, и, если требуется для решения задачи, эту операцию можно повторять неограниченное число раз.

На рис. 261 изображена точка A в системе плоскостей $\frac{V}{H}$. Заменим плоскость V новой плоскостью проекций V_1, перпендикулярной к плоскости H. Плоскость V_1 пересеклась с плоскостью H по прямой X_1, которая и будет являться осью проекций в новой системе.

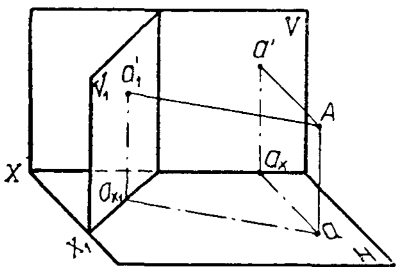


Рис. 261.

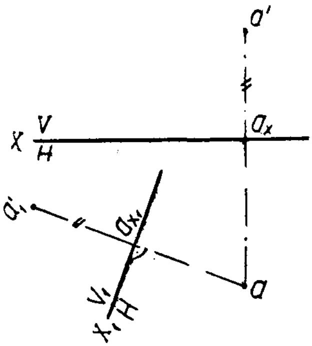


Рис. 262.

Определим проекции точки A в новой системе плоскостей проекций $\frac{V_1}{H}$. Так как плоскость H остается без изменения, то и проекция a на эту плоскость не изменится. Для нахождения фронтальной проекции a_1' точки A в системе $\frac{V_1}{H}$ опустим перпендикуляр из точки A на плоскость проекций V_1.

Отметим, что $a_1'a_{x_1}=Aa=a'a_x$, т. е. расстояние новой фронтальной проекции a_1' точки A до новой оси проекций X_1 равно расстоянию старой фронтальной проекции a' этой точки до старой оси проекций X.

Для перехода от пространственного изображения к чертежу надо плоскость V_1 повернуть вокруг оси X_1 до совмещения с плоскостью H.

Построение проекции a_1' на чертеже показано на рис. 262.

Из точки a перпендикулярно к оси X_1 проводим линию связи, и от точки a_{x_1} на этой линии связи откладываем $a_{x_1}a_1'=a_x a'$.

Исходя из сказанного, можно сделать вывод: *для построения на чертеже новой проекции точки при замене одной из плоскостей проекций надо опустить перпендикуляр на новую ось из той проекции точки, которая не меняется, и отложить на нем расстояние от заменяемой проекции до предыдущей оси.*

Зная правила построения проекций отдельных точек при замене плоскостей проекций, легко построить новые проекции любой группы точек, т. е. линии, плоскости или фигуры.

Решим несколько примеров этим способом.

Пример 1. Способом замены плоскостей проекций определить натуральную величину отрезка AB (рис. 263).

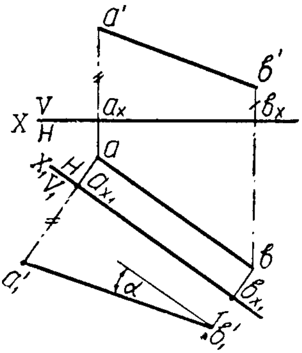


Рис. 263.

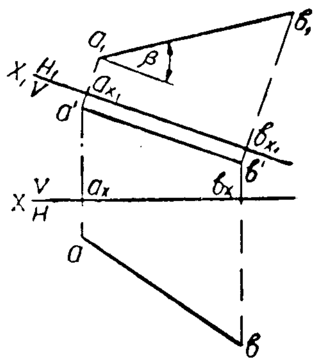


Рис. 264.

Решение. Для определения натуральной величины отрезка AB необходимо, чтобы в новой системе плоскостей проекций отрезок AB был параллельным одной из плоскостей проекций. Поэтому заменим плоскость V новой плоскостью V_1 таким образом, чтобы она была параллельна отрезку AB и в то же время перпендикулярна к плоскости проекций H. В этом случае новая ось проекций X_1 расположится параллельно ab. Расстояние новой оси от ab можно выбирать произвольно. Проведя из точек a и b перпендикуляры к новой оси, откладываем $a_{x_1}a_1'=a_x a'$ и $b_{x_1}b_1'=b_x b'$. Проекция $a_1'b_1'$ будет выражать натуральную величину отрезка AB. Угол α между $a_1'b_1'$ и осью X_1 равен углу наклона прямой AB к плоскости H.

Эту же задачу можно решить, заменив плоскость H новой плоскостью H_1, перпендикулярной к V и параллельной AB (рис. 264). В этом случае новая ось проекций X_1 будет параллельна $a'b'$. Проводя перпендикуляры к ней через a' и b' и откладывая $a_{x_1}a_1 = a_x a$ и $b_{x_1}b_1 = b_x b$, находим новую проекцию a_1b_1, которая и будет выражать натуральную величину отрезка AB. Угол β между проекцией a_1b_1 и осью X_1 равен углу наклона прямой AB к плоскости проекций V.

Пример 2. Определить расстояние между горизонтальными прямыми AB и CD (рис. 265).

Решение. Заменим плоскость V новой плоскостью V_1, перпендикулярной к плоскости H и прямым AB и CD. Новую ось проекций X_1 проведем перпендикулярно горизонтальным проекциям прямых. На новую плоскость проекций V_1 прямые

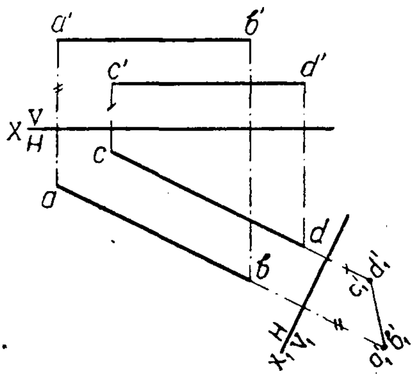


Рис. 265.

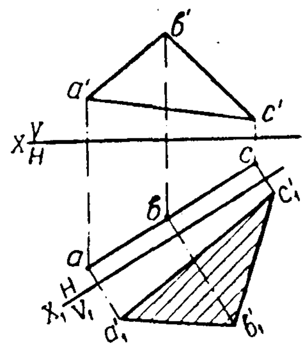


Рис. 266.

AB и CD спроецируются в точки, расстояние между которыми будет искомым.

Пример 3. Определить натуральную величину треугольника ABC, расположенного в горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 266).

Решение. Заменим плоскость V новой плоскостью V_1, перпендикулярной к плоскости H и параллельной плоскости треугольника ABC. Новая ось проекций X_1 будет проходить параллельно горизонтальной проекции треугольника. В новой системе плоскостей проекций $\frac{H}{V_1}$ плоскость треугольника ABC будет параллельна плоскости проекций V_1 и, следовательно, спроецируется на нее в натуральную величину.

На практике встречаются задачи, решение которых требует последовательной замены двух или нескольких плоскостей проекций. Правила построения новых проекций остаются точно такими же, как и при замене одной плоскости проекций. Разберем это на примерах.

Пример 4. Определить расстояние между параллельными прямыми общего положения AB и CD (рис. 267).

Решение. Одной заменой плоскости проекций задачу решить нельзя, так как прямые AB и CD являются прямыми общего положения и перпендикулярная к ним плоскость также будет плоскостью общего положения. Поэтому вначале так заменим плоскость, чтобы в новой системе плоскостей проекций прямые AB и CD заняли частное положение (т. е. были бы параллельны одной из плоскостей проекций).

Первая замена: заменим плоскость V новой плоскостью V_1, перпендикулярной к плоскости H и параллельной прямым AB и CD. Новая ось проекций X_1 будет параллельна горизонтальным проекциям прямых. Проекции прямых на плоскость V_1 определятся, как было описано выше.

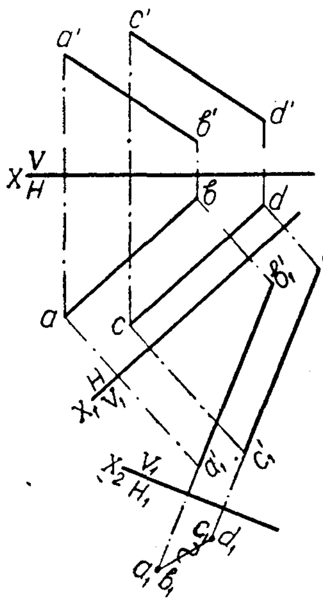


Рис. 267.

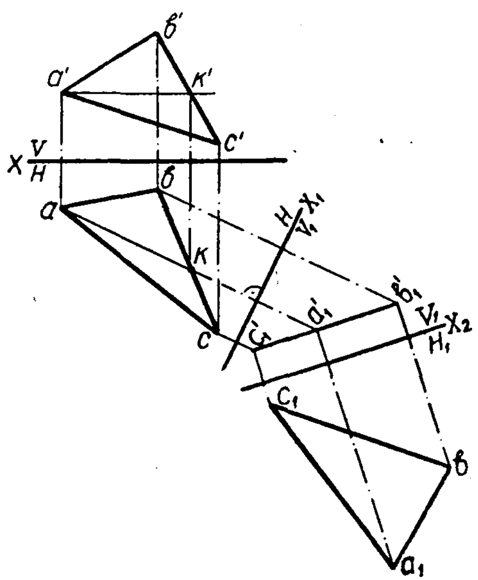


Рис. 268.

Вторая замена: заменим плоскость H новой плоскостью H_1, перпендикулярной к плоскости V_1 и к прямым AB и CD. Новая ось проекций X_2 будет перпендикулярна к проекциям $a_1'b_1'$ и $c_1'd_1'$. Для определения проекций прямых на плоскости H_1 проведем перпендикулярно к оси X_2 линии связи и от оси X_2 отложим расстояния, взятые от заменяемой проекции до предыдущей оси. В данном случае заменяются проекции на плоскости H, а предыдущей осью будет ось X_1. На плоскость H_1 прямые AB и CD спроецируются в точки, расстояние между которыми будет искомым.

Пример 5. Определить натуральный вид треугольника ABC (рис. 268).

Решение. Треугольник спроецируется в натуральную величину на какую-либо плоскость проекций, если он окажется параллельным этой плоскости, но т. к. плоскость треугольника является плоскостью общего положения, то и параллельная ему плоскость также будет плоскостью общего положения. Для того чтобы треугольник ABC оказался параллельным одной из плоскостей проекций, необходимо выполнить двойную замену плоскостей.

Вначале заменим плоскость V плоскостью V_1. Плоскость V_1 должна быть перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и к плоскости H; новая ось проекций X_1 должна быть перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали. На плоскость V_1 треугольник спроецируется в виде прямой линии $c_1'a_1'b_1'$.

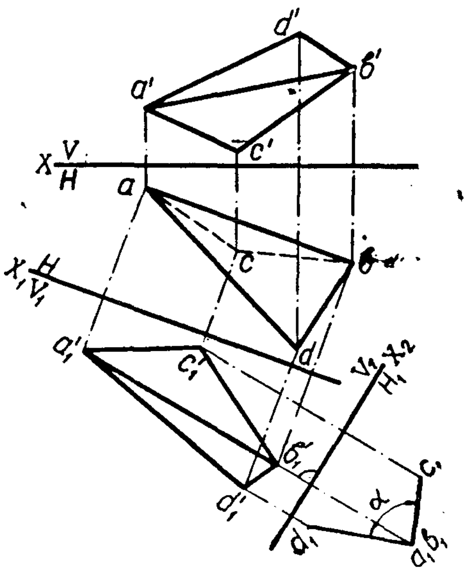


Рис. 269.

При второй замене, заменив плоскость H новой плоскостью H_1, перпендикулярной к V_1 и параллельной плоскости треугольника, получим на плоскости H_1 проекцию $a_1b_1c_1$, которая будет выражать натуральный вид треугольника ABC. Новая ось проекций X_2 проведена параллельно проекции $c_1'a_1'b_1'$.

Пример 6. Определить величину двугранного угла при ребре AB (рис. 269).

Решение. Двугранный угол измеряется линейным углом, составленным линиями пересечения граней двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной к его ребру. Для того чтобы линейный угол спроецировался на плоскость проекций в натуральную величину, надо новую плоскость проекций поставить перпендикулярно к ребру двугранного угла. Но т. к. ребро AB является прямой общего положения, то и перпендикулярная к нему плоскость будет в системе плоскостей $\frac{H}{V}$ плоскостью общего положения. Для решения этой задачи поэтому необходимо произвести две последовательные замены плоскостей проекций.

Вначале заменим плоскость V плоскостью V_1, перпендикулярной к плоскости H и параллельной ребру AB. Ось проекций X_1 будет параллельна проекции ab. Далее заменим плоскость H плоскостью H_1, перпендикулярной к V_1 и к ребру AB. На плоскость H_1 ребро AB спроецируется в точку, а грани DAB и CAB — в прямые линии, угол между которыми будет искомым.

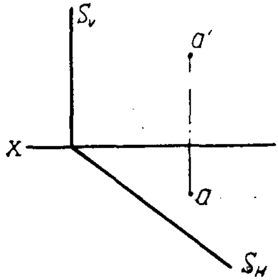


Рис. 270.

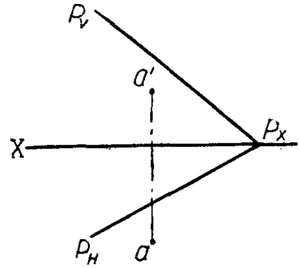


Рис. 271.

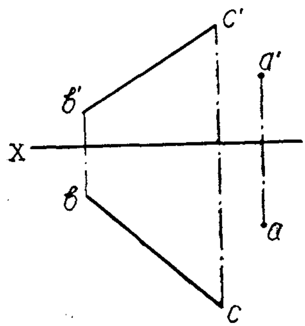


Рис. 272.

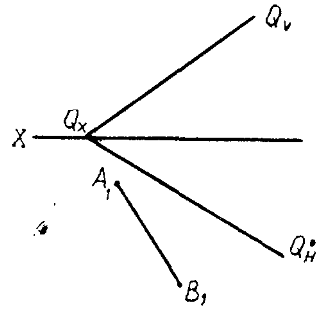


Рис. 273.

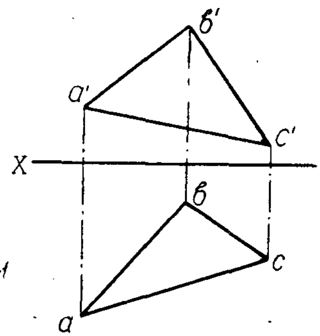


Рис. 274.

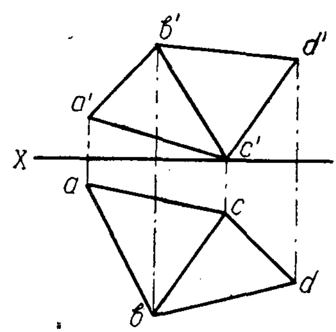


Рис. 275.

Для закрепления материала данной темы рекомендуется решить следующие задачи:

1) Точку A ввести в плоскость S вращением вокруг следа S_v (рис. 270).

2) Определить расстояние от точки A до плоскости P (рис. 271).

3) Изобразить следами две плоскости общего положения, параллельные между собой, и определить расстояние между этими плоскостями по способу замены плоскостей проекций.

4) Определить расстояние от точки A до прямой BC всеми возможными способами (рис. 272).

5) Построить проекции отрезка AB, подняв его в плоскость Q вращением вокруг $Q_н$ из совмещенного с плоскостью H положения A_1B_1 (рис. 273).

6) Определить натуральный вид треугольника ABC всеми возможными способами (рис. 274).

7) Определить величину двугранного угла при ребре BC способом замены плоскостей проекций (рис. 275).

Глава 7

КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖЕ

§ 36. Кривые линии

Кривые линии могут быть *плоскими* и *пространственными*. *Плоская кривая линия — это такая линия, все точки которой лежат в одной плоскости.* Примерами плоских кривых линий являются окружность, эллипс, парабола, гипербола, спираль Архимеда.

Пространственными кривыми линиями называются линии, которые не могут быть совмещены с плоскостью всеми своими точками. Примерами таких линий могут служить винтовые линии: цилиндрические и конические.

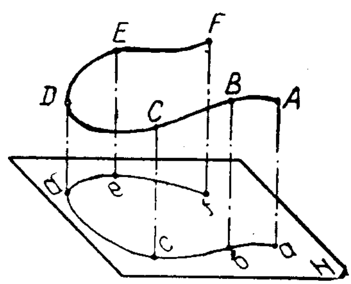


Рис. 276.

Для построения проекций кривой линии необходимо спроецировать на плоскость ряд принадлежащих ей точек (рис. 276).

Длина некоторого участка кривой линии может быть определена приближенно (кроме кривых, длина которых может быть определена путем несложных вычислений). Для определения длины кривой линии заменяют небольшие участки кривой отрезками прямой линии, т. е. в кривую линию вписывают ломаную линию и затем измеряют длину ее звеньев.

Определение точки пересечения кривой линии с плоскостью аналогично определению точки пересечения прямой линии с плоскостью; в обоих случаях через линию проводят вспомогательную поверхность, которая для прямой линии является плоскостью.

§ 37. Винтовые линии

Наиболее распространенными видами винтовых линий являются цилиндрическая и коническая винтовые линии, хотя винтовая линия может быть построена на любой поверхности вращения.

Цилиндрическая винтовая линия — это линия, описываемая точкой, движущейся равномерно вдоль образующей цилиндра, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси цилиндра.

На рис. 277 показано построение проекций цилиндрической винтовой линии и ее развертка. Фронтальной проекцией этой линии является синусоида, горизонтальной — окружность.

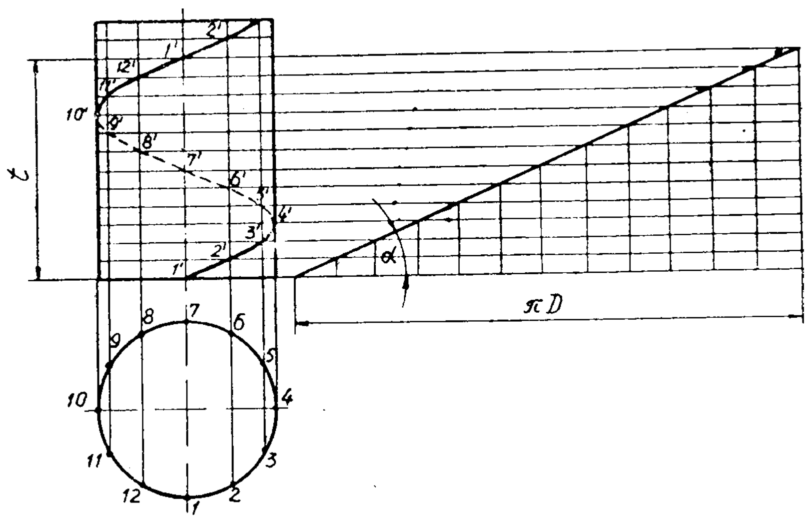


Рис. 277.

Винтовые линии бывают *правые* и *левые*. Если подъем винтовой линии осуществляется против часовой стрелки, будет правая винтовая линия, если по часовой, то будет — левая.

У винтовой линии различают следующие элементы: *виток, ход, шаг и угол подъема.*

Виток — это часть винтовой линии, описываемая точкой за один оборот образующей вокруг оси цилиндра.

Ход (t) — расстояние между начальной и конечной точками витка, измеренное вдоль образующей цилиндра.

Шаг (s) — расстояние между смежными витками, измеренное также вдоль образующей цилиндра.

Винтовая линия может быть *одноходовой* и *многоходовой.*

Чтобы получить многоходовую винтовую линию, надо разделить заданный ход винтовой линии на несколько равных частей и построить от точек деления на цилиндре винтовые линии того же хода. У двухходовой винтовой линии ход $t = 2s$.

Угол подъема винтовой линии α — это угол между прямой, касательной к винтовой линии и плоскостью основания цилиндра. Он легко определяется из выражения $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\pi D}$, где: t — ход винтовой линии, D — диаметр окружности основания цилиндра. Развертка цилиндрической винтовой линии представляет собой прямую линию и, следовательно, угол подъема винтовой линии в любой ее точке будет постоянным. Длина одного витка винтовой линии $L = \sqrt{t^2 + (\pi D)^2}$.

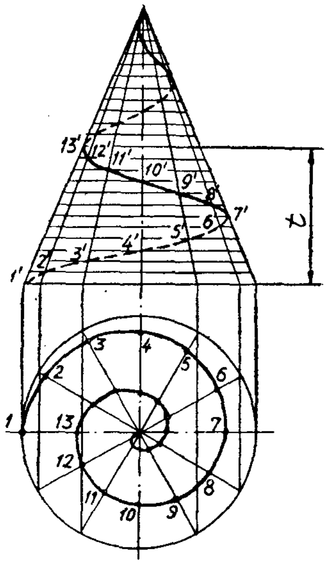


Рис. 278.

Коническая винтовая линия образуется подобно цилиндрической, только образующей поверхностью будет уже не цилиндрическая, а коническая поверхность. Горизонтальной проекцией конической винтовой линии будет спираль Архимеда, а фронтальной — синусоида с уменьшающейся высотой волны (рис. 278).

§ 38. Кривые поверхности

Кривая поверхность в начертательной геометрии рассматривается как поверхность, образованная движением некоторой линии в пространстве. Эта линия называется *образующей* или *производящей.* Если перемещение образующей происходит по определенному закону, получается *закономерная поверхность;* при случайном передвижении образующей поверхность будет *случайная,* или *поверхность общего вида.*

Если образующей является прямая линия, то такую поверхность называют *линейчатой;* если поверхность образована движением кривой линии, то такая поверхность будет называться *нелинейчатой.* На чертеже кривая поверхность должна быть изображена с помощью таких элементов, которые дали бы возможность построить проекции любой образующей или точки данной поверхности и, следовательно, решать любые, относящиеся к ней задачи. Например, для изображения на чертеже конуса достаточно дать проекции его вершины и основания. Полный контур поверхности наносят на чертеж лишь для наглядности, чтобы подчеркнуть, что за пределами этого контура нет точек, принадлежащих конусу.

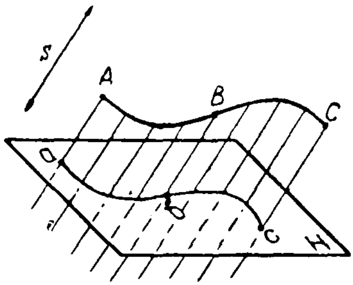


Рис. 279.

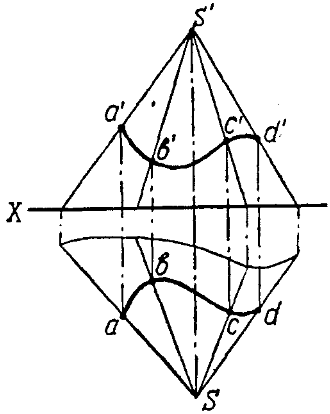


Рис. 280.

Линейчатые поверхности разделяются на две группы: *развертывающиеся, которые можно без складок и разрывов развернуть на плоскость, и неразвертывающиеся.* Из линейчатых поверхностей более подробно рассмотрим цилиндрические и конические поверхности, т. к. они часто встречаются на практике.

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой (образующей), *скользящей по некоторой неподвижной замкнутой или разомкнутой кривой (ABC), оставаясь параллельной заданному направлению S* (рис. 279). Неподвижная кривая *(ABC)*, по которой скользит образующая, называется *направляющей*. Линия *abc*, по которой данная поверхность пересекает плоскость проекций, называется *следом поверхности*. Для определения на чертеже следа цилиндрической поверхности необходимо построить следы нескольких образующих этой поверхности и полученные точки соединить плавной кривой линией. На чертеже цилиндрическая поверхность может быть задана проекциями направляющей (или следа) и одной из образующих.

Цилиндрическая поверхность может быть неограниченно продолжена в обе стороны по направлению ее образующих. На практике при построении изображений мы имеем дело всегда с ограниченными отрезками цилиндрической поверхности. Часть цилиндрической поверхности, заключенная между двумя плоскими параллельными сечениями, называется *цилиндром*, а сами сечения — его *основаниями*. Сечение цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее образующим, называется *нормальным*.

В зависимости от формы нормального сечения цилиндрические поверхности получают дополнительные, характеризующие их наименования. Если нормальным сечением является круг — цилиндр будет *круговой*, если эллипс — цилиндр будет *эллиптический*, парабола — *параболический*, гипербола — *гиперболический*. Если нормальное сечение — геометрически неопределенная кривая, то будет *цилиндр общего вида*.

Цилиндрические поверхности бывают *замкнутыми* (например, круговой или эллиптический цилиндр) и *разомкнутыми* (параболический, гиперболический). Если основанием цилиндра будет его нормальное сечение, то такой цилиндр будет называться *прямым*, если основанием будет служить какое-либо косое сечение — цилиндр будет называться *наклонным*.

Коническая поверхность (рис. 280) *образуется движением прямой, скользящей по некоторой замкнутой или разомкнутой кривой и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку* (*S*). Она неограниченно простирается в обе стороны от точки *S*, т. е. имеет две полости.

Часть конической поверхности, ограниченная вершиной и какой-либо плоскостью, пересекающей все образующие, называют *конусом*. Любое сечение конической поверхности такой плоскостью может быть принято за *основание конуса*.

Под *нормальным* сечением конической поверхности понимается сечение ее плоскостью, перпендикулярной к оси поверхности. *Осью* же конической поверхности является линия пересечения ее плоскостей симметрии. Отсюда следует, что не все конические поверхности имеют ось, а только такие, у которых есть по крайней мере две плоскости симметрии. Конические поверхности, не имеющие оси, называют *коническими поверхностями общего вида*. Конические поверхности, имеющие ось, называются сообразно виду нормального сечения. Если нормальное сечение конической поверхности круг, она называется *круговой*. Если принять это нормальное сечение за основание конуса, получим *прямой круговой конус* (его высота совпадает с осью и проходит через центр основания).

Конические поверхности (как и цилиндрические) могут быть *эллиптическими, параболическими* и т. д.

Если направляющая кривая линия заменяется вписанной в нее ломаной линией, состоящей из прямолинейных звеньев, то цилиндрическая поверхность заменяется призматической, а коническая — пирамидальной (гранями многогранного угла). Такая связь между этими поверхностями будет использоваться в дальнейших построениях.

Цилиндрические и конические поверхности относятся к развертывающимся поверхностям.

Отметим некоторые из линейчатых неразвертывающихся поверхностей.

Цилиндроид — это кривая прямолинейчатая поверхность, образованная движением прямой, скользящей по двум кривым направляющим (не лежащим в одной плоскости) и остающейся во всех положениях параллельной некоторой заданной плоскости. Эта плоскость (P) называется *плоскостью параллелизма* (рис. 281).

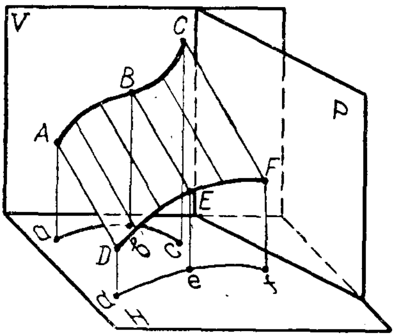


Рис. 281.

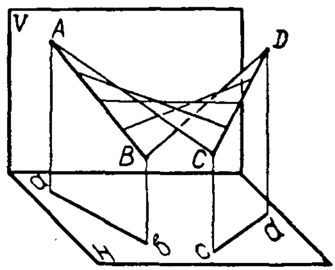


Рис. 282.

Коноид — это цилиндроид, одной из направляющих которого является прямая линия.

Линейчатый параболоид (*косая плоскость* или *гиперболический параболоид*) — это поверхность, образованная в результате перемещения прямолинейной образующей по двум направляющим — скрещивающимся прямым параллельно некоторой плоскости параллелизма.

На рис. 282 направляющими являются прямые AB и CD, плоскостью параллелизма — плоскость проекций H.

Цилиндроид, коноид и линейчатый параболоид — это поверхности с плоскостью параллелизма. К линейчатым поверхностям относятся также однополостный гиперболоид и винтовые поверхности, цилиндрические и конические.

Нелинейчатые поверхности, т. е. поверхности, образованные перемещением кривой линии, являются поверхностями неразвертывающимися. Развернуть их можно только приближенно. К ним относятся следующие.

Сферическая поверхность (*шар*) — это поверхность, образованная вращением окружности вокруг ее диаметра. Проекцией шара на любой плоскости проекций является окружность того же диаметра.

Эллипсоид вращения — поверхность, образованная вращением эллипса вокруг его большой или малой оси. Если вращение происходит вокруг большой оси, то такой эллипсоид называют *вытянутым* (рис. 283). Если эллипсоид вращения получен в результате вращения эллипса вокруг его малой оси — это будет *сжатый* эллипсоид вращения.

Двуполостный гиперболоид — поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси (рис. 284).

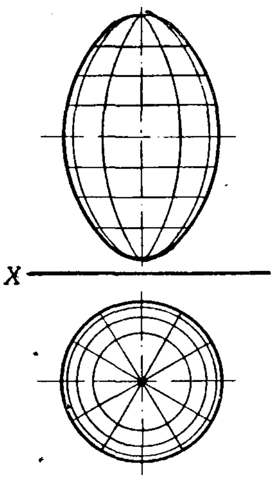


Рис. 283.

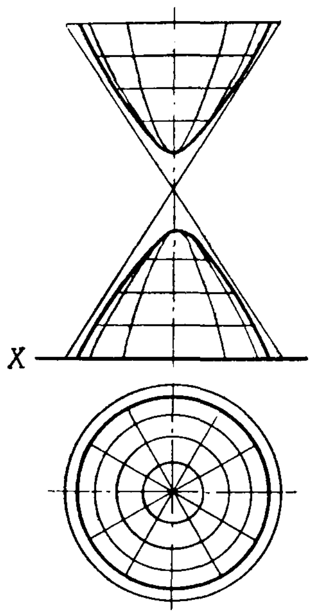


Рис. 284.

Параболоид вращения — поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси (рис. 285).

Тор (круговое кольцо) — поверхность, полученная в результате вращения окружности (или ее дуги) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и ее не пересекающей (рис. 286).

Поверхность случайного вида — поверхность вращения, образованная вращением произвольной кривой вокруг оси.

Положение точки на поверхности вращения определяется обычно при помощи окружности, проходящей через эту точку на поверхности.

Поверхности второго порядка — кривые поверхности, сечение которых любой плоскостью есть кривая второго порядка. Из рассмотренных кривых поверхностей поверхностями второго порядка являются круговой, эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры, круговой и эллиптический конусы, шар, эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды. Причем шар, эллипсоид, двуполостный гиперболоид и параболоид являются нелинейчатыми поверхностями, остальные — линейчатыми.

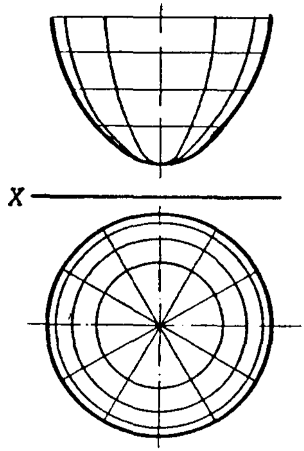


Рис. 285.

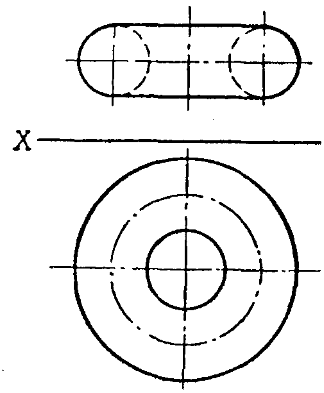


Рис. 286.

Прямая линия пересекает любую поверхность второго порядка не более, чем в двух точках. (Более подробно о кривых линиях и кривых поверхностях см. В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. М. 1969, стр. 182—234).

Глава 8

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТЕЛ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

§ 39. Пересечение многогранников плоскостью

Для построения фигуры, получаемой при пересечении призмы и пирамиды плоскостью, надо найти точки, в которых ребра призмы или пирамиды пересекают данную плоскость, или найти отрезки прямых, по которым грани призмы или пирамиды пересекаются с плоскостью.

В первом случае построение сводится к задаче на пересечение прямой с плоскостью, во втором случае — на пересечение плоскостей между собой.

На рис. 287 прямая треугольная призма пересекается плоскостью общего положения P. Для определения точек пересечения ребер призмы с плоскостью P через ребра проведены вспомогательные фронтальные плоскости S_1, S_2 и S_3, затем построены линии пересечения этих вспомогательных плоскостей с плоскостью P, и, наконец, определены точки пересечения ребер призмы с линиями пересечения этих плоскостей. Соединив полученные точки $1'$, $2'$, $3'$ отрезками прямых линий, получим фронтальную проекцию сечения. Горизонтальная проекция сечения совпадет с горизонтальной проекцией призмы. В данном случае в качестве вспомогательных выбраны фронтальные секущие плоскости для простоты построения линий пересечения их с плоскостью P.

На рис. 288 эта же задача решена путем нахождения линий пересечения граней призмы с секущей плоскостью P. Построены линии 1—2 и 1—3 — линии пересечения граней призмы с плоскостью P при помощи горизонтально-проецирующих плоскостей S_1 и S_2, проведенных через грани призмы.

На рис. 289 наклонная треугольная призма пересекается плоскостью общего положения P. В этом случае для построения проекций фигуры сечения более удобным является способ определения точек пересечения ребер призмы с плоскостью P, которые определены при помощи вспомогательных фронталь-

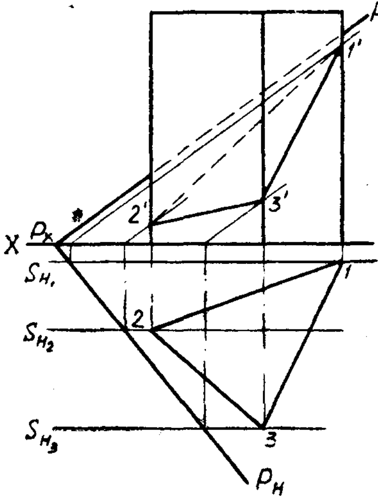


Рис. 287.

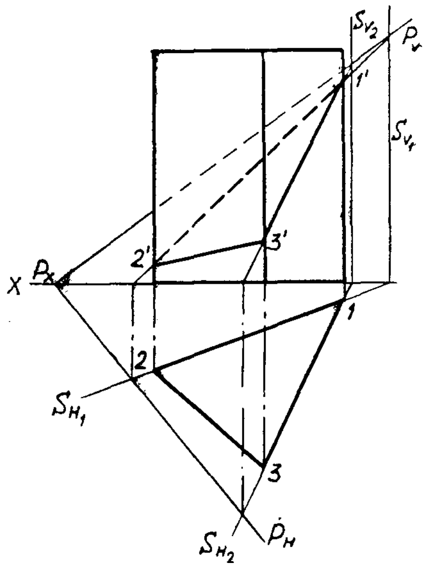


Рис. 288.

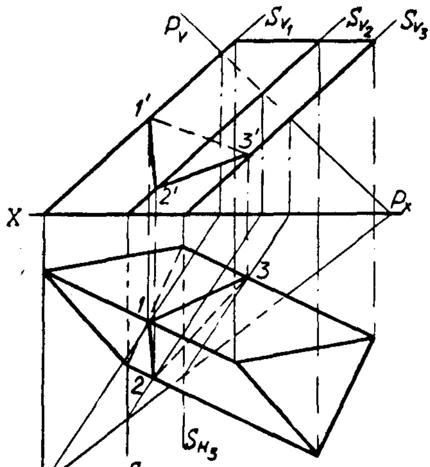


Рис. 289.

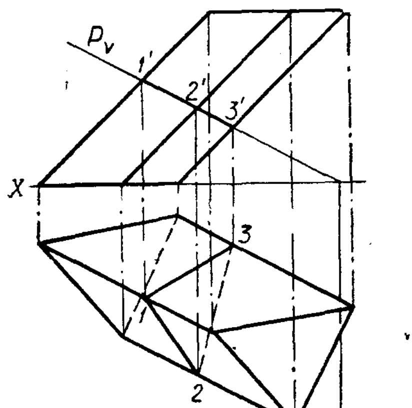


Рис. 290.

но-проецирующих плоскостей, проведенных через ребра призмы.

Если секущей плоскостью является плоскость частного положения, то построения фигуры сечения значительно упрощаются. На рис. 290 фронтально-проецирующая плоскость P пересекает наклонную треугольную призму. Задача решена без дополнительных построений, т. к. фронтальная проекция фигуры сечения ($1'$, $2'$, $3'$) находится на фронтальном следе P_v **секущей плоскости** P. Горизонтальная проекция фигуры сечения получена проведением линий связи к соответствующим ребрам призмы.

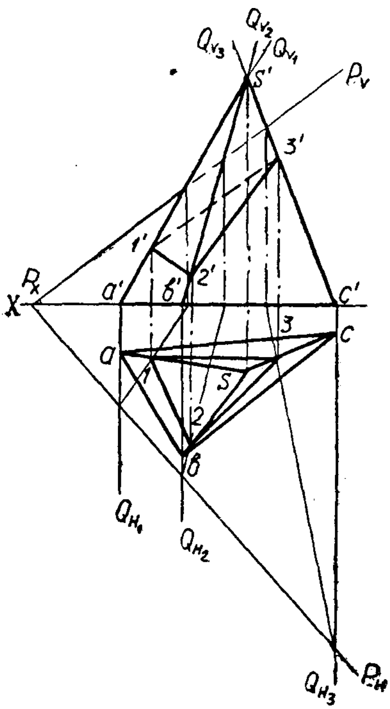


Рис. 291.

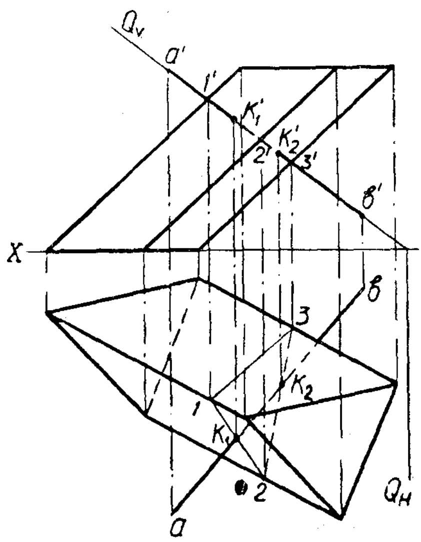


Рис. 292.

Задачу, приведенную на рис. 289, можно было бы решить также с применением метода замены плоскостей проекций, выбрав новую систему плоскостей проекций так, чтобы секущая плоскость P заняла в ней положение проецирующей плоскости.

Построение проекций сечения пирамиды плоскостью ничем не отличается от построения сечения призмы. На рис. 291 плоскость общего положения P пересекает треугольную пирамиду. В этом примере точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью P определены при помощи вспомогательных фронтально-проецирующих плоскостей Q_1, Q_2 и Q_3.

§ 40. Пересечение многогранников прямой линией

Для нахождения точек пересечения прямой линии с поверхностями, так называемых *точек входа* и *выхода*, в общем случае производятся построения, аналогичные построениям, выполнявшимся при нахождении точки пересечения прямой с плоскостью. Эти построения состоят в следующем: *через заданную прямую проводят вспомогательную плоскость, строят линию пересечения этой плоскости с поверхностью тела и в пересечении соответствующей проекции этой линии с проекцией прямой отмечают искомые точки.*

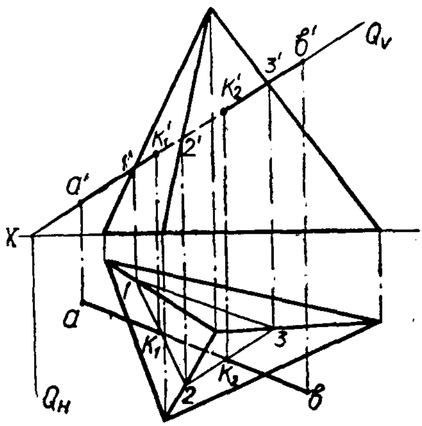


Рис. 293.

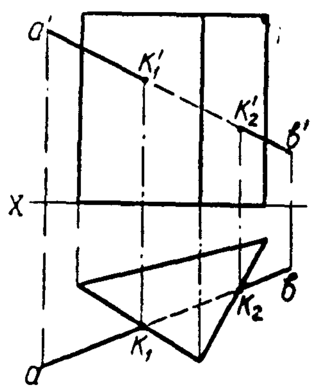


Рис. 294.

На рис. 292 показано определение точек пересечения прямой AB с поверхностью наклонной треугольной призмы, на рис. 293 — точек пересечения прямой AB с поверхностью треугольной пирамиды. В обоих случаях через прямую проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость Q, найдены сечения данных тел плоскостью и определены точки пересечения данной прямой с полученными сечениями тел.

В тех случаях, когда ребра многогранников перпендикулярны к одной из плоскостей проекций или сама прямая перпендикулярна к какой-либо из них, точки входа и выхода находятся без особых дополнительных построений, как показано на рис. 294.

§ 41. Пересечение тел вращения плоскостью

Форма фигуры сечения тел вращения плоскостью зависит от положения секущей плоскости. При пересечении кругового цилиндра плоскостью в сечении могут получиться: 1) *окружность,* если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра; 2) *эллипс,* если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра; 3) *прямоугольник,* если секущая плоскость параллельна оси цилиндра; 4) *прямая линия,* если секущая плоскость проходит касательно к поверхности цилиндра.

Более разнообразны сечения кругового конуса. При пересечении кругового конуса плоскостью получаются: 1) *окружность,* если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса; 2) *эллипс,* если секущая плоскость наклонена к оси и пересекает все образующие; 3) *треугольник,* если секущая плоскость проходит через вершину конуса; 4) *парабола,* если секущая плоскость параллельна одной из образующих; 5) *гипербола,* если секущая плоскость параллельна двум образующим (в частности, это будет иметь место тогда, когда секущая плоскость параллельна оси конуса; 6) *прямая линия,* если секущая плоскость касательна к поверхности конуса.

При пересечении *шара* плоскостью в сечении всегда получается *окружность.*

Определение проекций сечения цилиндра плоскостью мало чем отличается от определения проекций сечения призмы плоскостью. В общем случае для определения кривой линии, получаемой при пересечении цилиндрической поверхности плоскостью, следует построить точки пересечения образующих с секущей плоскостью. Иначе говоря, в цилиндр вписывается многогранная призма, строится фигура сечения призмы плоскостью, а затем полученные точки соединяются не ломаной, а плавной кривой линией.

Определение проекций сечения конуса плоскостью также подобно определению проекций сечения пирамиды плоскостью: в конус вписывается многогранная пирамида, определяются точки пересечения ребер этой пирамиды с секущей плоскостью, а затем полученные точки соединяются плавной кривой линией.

На рис. 295 показано построение фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения P. Для определения точки пересечения ближней образующей цилиндра с плоскостью P через образующую проведена вспомогательная фронтальная плоскость S_1, определена линия пересечения плоскостей P и S_1 (она пройдет по фронтали плоскости P) и затем определена точка 1 пересечения образующей с линией пересечения двух плоскостей.

Подобным образом определяются точки пересечения остальных образующих с плоскостью P.

Обычно при определении фигуры сечения цилиндра плоскостью вначале находят крайние (*высшую, низшую, левую* и *правую*) точки сечения, а затем несколько промежуточных точек. Высшая и низшая точки сечения позволяют судить о том, в какой части поверхности по высоте следует находить промежуточные точки, а левая и правая точки отделяют видимую часть кривой сечения от невидимой. Высшая и низшая точки сечения будут, очевидно, находиться на линии наибольшего ската плоскости P, пересекающей ось цилиндра. Поэтому для определения высшей и низшей точек сечения — точек

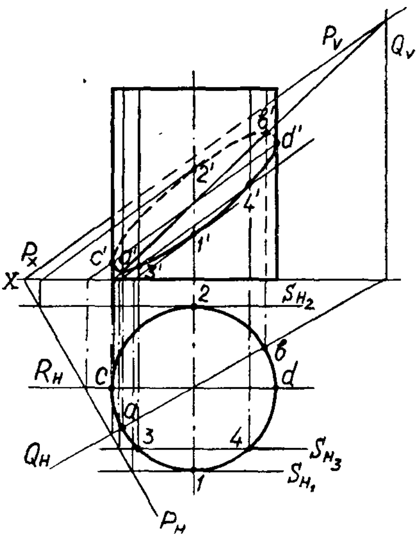


Рис. 295.

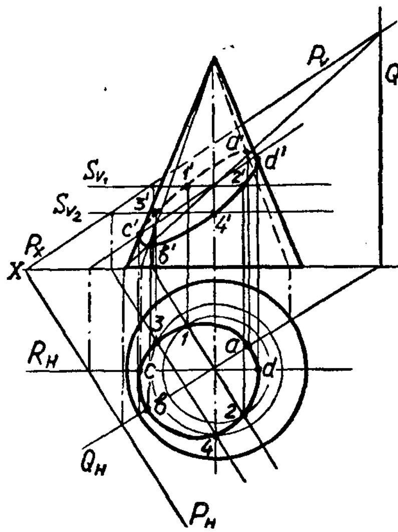


Рис. 296.

A и B через ось цилиндра перпендикулярно к плоскости P проведена горизонтально-проецирующая плоскость Q. Затем построена линия пересечения плоскостей P и Q и образующие, по которым плоскость Q пересекает поверхность цилиндра. В пересечении этих линий отмечены точки A и B.

Левая и правая точки сечения — точки C и D построены при помощи фронтальной плоскости R, проведенной через ось цилиндра. Промежуточные точки сечения 1, 2, 3, 4 найдены при помощи фронтальных плоскостей S_1, S_2, S_3.

Проекции сечения наклонного цилиндра плоскостью строятся при помощи вспомогательных проецирующих плоскостей, проводимых через ряд образующих цилиндра.

На рис. 296 показано построение проекций сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения P. Крайняя верхняя и нижняя точки сечения — точки A и B построены при помощи вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости Q, проходящей через ось конуса перпендикулярно к плоскости P. Построена линия пересечения плоскостей P и Q, потом образующие, по которым плоскость Q пересекает поверхность конуса, и, наконец, определены точки A и B в пересечении этих линий. Левая и правая точки сечения (C и D) построены при помощи фронтальной плоскости R, проведенной через ось конуса. Промежуточные точки сечения 1, 2, 3, 4 найдены при помощи горизонтальных плоскостей S_1 и S_2, проведенных между верхней и нижней точками сечения. Если

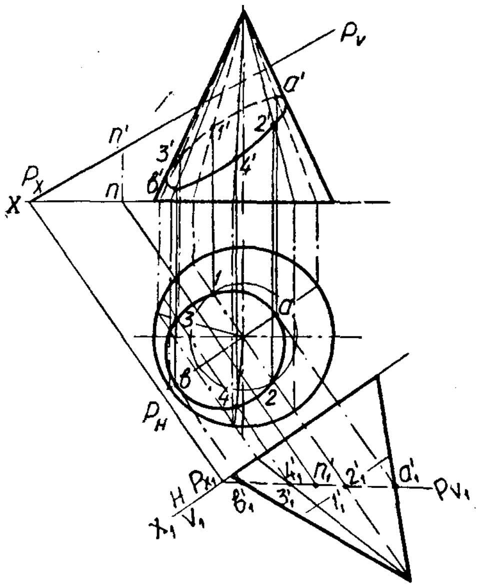


Рис. 297.

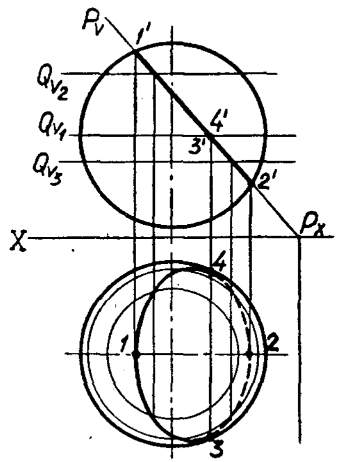


Рис. 298.

плоскость пересекает наклонный конус, то в него вписывается многогранная пирамида и находятся точки пересечения ее ребер с секущей плоскостью, которые затем соединяются плавной кривой линией.

Построение проекций фигуры сечения цилиндра или конуса плоскостью значительно упрощается, если секущая плоскость занимает частное положение, т. к. в этом случае одна из проекций сечения совпадает со следом секущей плоскости. Поэтому при решении задач на пересечение поверхностей вращения плоскостью целесообразно применить способ замены плоскостей проекций: ввести новую систему, в которой секущая плоскость займет частное положение.

На рис. 297 показано определение точек сечения (A, B, 1, 2, 3, 4) конуса плоскостью P с применением способа замены плоскостей проекций. На рис. 298 показано построение проекций сечения шара фронтально-проецирующей плоскостью P.

Для определения проекций сечения шара плоскостью общего положения можно воспользоваться горизонтальными или фронтальными секущими плоскостями. В этом случае для упрощения решения задачи целесообразно применить способ замены плоскостей проекций: ввести новую систему, в которой секущая плоскость займет частное положение, и решать задачу, как показано на рис. 298.

Часто при решении задач на построение сечений тел плоскостями необходимо находить натуральный вид фигуры сечения. Его находят, применяя один из методов преобразования проекций, обычно — метод совмещения.

§ 42. Пересечение тел вращения прямой линией

Для определения точек пересечения прямой линии с поверхностью вращения, как и при определении точек пересечения прямой с поверхностью многогранника, через прямую необходимо провести вспомогательную секущую плоскость, найти линию пересечения данной поверхности вспомогательной плоскостью и отметить точки пересечения данной прямой с найденной линией пересечения.

Вспомогательные секущие плоскости необходимо выбирать такими, чтобы в сечении получалась возможно более простая фигура.

На рис. 299 точки пересечения (M и N) прямой AB с поверхностью прямого кругового цилиндра определены при помощи горизонтально-проецирующей плоскости S, проходящей через прямую AB и пересекающей цилиндр по образующим.

На рис. 300 показано определение точек пересечения прямой AB с поверхностью наклонного цилиндра. Через прямую AB проведена плоскость, выраженная двумя пересекающимися прямыми AB и BC, одна из которых (BC) параллельна образующим цилиндра. Эта плоскость будет пересекать цилиндр по образующим, так как параллельна образующим одна из прямых, выражающих ее.

Эта плоскость является плоскостью общего положения, а не проецирующей, к каким мы прибегали при определении точек пересечения. Можно и в данном случае применить проецирующую плоскость, но это усложнит решение задачи, т. к. в сечении получится эллипс, построение которого представляет известные трудности и очень снижает точность решения.

Для определения образующих, по которым проведенная вспомогательная плоскость пересекает поверхность цилиндра, необходимо определить горизонтальный след этой плоскости. Для этого построены горизонтальные следы (точки M_1 и M_2) прямых AB и BC и через них проведен горизонтальный след плоскости, который пересечет горизонтальную проекцию основания цилиндра в точках 1 и 2, определяющих положение искомых образующих.

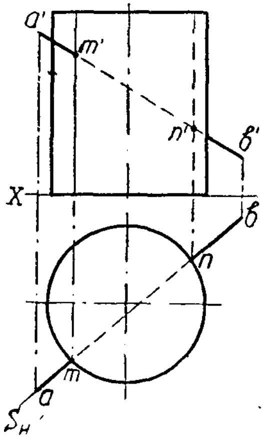


Рис. 299.

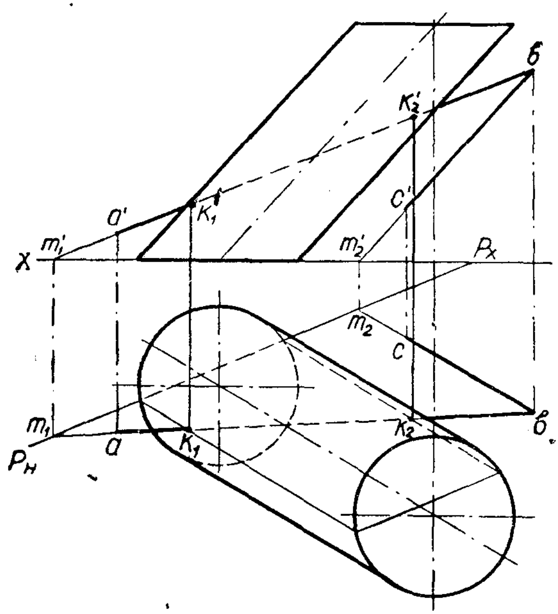


Рис. 300.

В пересечении проекций этих образующих с соответствующими проекциями прямой AB и отмечены точки K_1 и K_2 — точки входа и выхода.

На рис. 301 показано определение точек пересечения K_1 и K_2 горизонтальной прямой AB с поверхностью прямого кругового конуса. В качестве вспомогательной здесь выбрана горизонтальная секущая плоскость T, проходящая через прямую AB и пересекающая поверхность конуса по окружности.

На рис. 302 показано определение точек пересечения K_1 и K_2 прямой общего положения AB с поверхностью прямого кругового конуса. В качестве вспомогательной секущей плоскости выбрана плоскость общего положения, выраженная двумя пересекающимися прямыми AB и SC, проходящая через вершину конуса и поэтому пересекающая поверхность конуса по двум образующим.

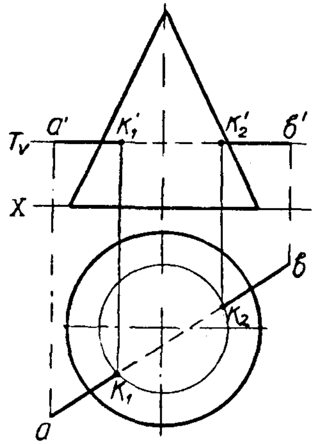


Рис. 301.

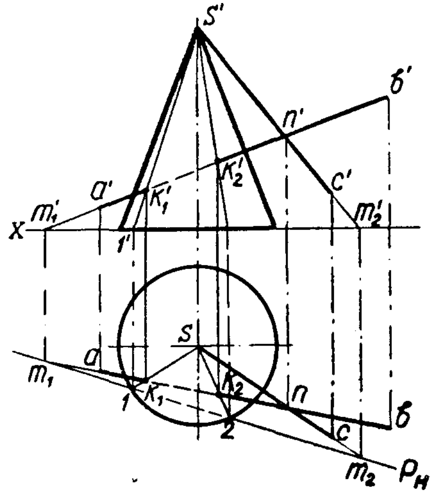


Рис. 302.

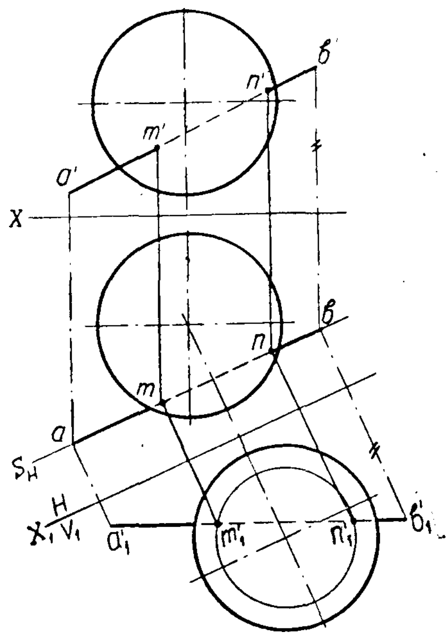


Рис. 303.

Для определения этих образующих определяем вначале горизонтальные следы (M_1 и M_2) прямых AB и SC. Через них проводим горизонтальный след плоскости, который пересечет горизонтальную проекцию основания конуса в точках 1 и 2, определяющих положение искомых образующих. В пересечении проекций этих образующих с соответствующими проекциями прямой AB найдены искомые точки K_1 и K_2.

Для определения точек пересечения прямой AB с поверхностью шара (рис. 303) применен способ замены плоскостей проекций. В качестве вспомогательной плоскости взята горизонтально-проецирующая плоскость S, проходящая через прямую AB. В сечении шара этой плоскостью получится окружность. Эта окружность вместе с прямой AB спроецирована на новую плоскость проекций V_1, где и определены искомые точки M и N — точки входа и выхода.

Глава 9

РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТЬ

Разверткой поверхности какого-либо тела называется плоская фигура, полученная путем совмещения поверхности этого тела с плоскостью. Чертежи разверток имеют большое применение в производстве изделий из листового материала: в судостроении, в котельном, кровельном, картонажном и других производствах.

§ 43. Развертки поверхностей многогранников

Построение развертки поверхности многогранника сводится к построению натуральных размеров и формы отдельных его граней, что выполняется известными способами совмещения, перемены плоскостей проекций или вращения. В простейших случаях развертки могут быть вычерчены и без построения проекций тела. Например, для построения развертки поверхности куба достаточно знать размер одного ребра, т. к. все грани его являются квадратами. Для построения развертки поверхности прямой призмы достаточно знать размеры сторон основания и высоту призмы (т. е. длину боковых ребер), т. к. боковые грани в этом случае будут прямоугольниками (рис. 304).

Для построения полной развертки поверхности призмы необходимо к полученной развертке боковой поверхности призмы пристроить в натуральную величину оба ее основания. В общих случаях для нахождения разверток поверхностей многогранников необходимо прибегать к некоторым специальным построениям.

Рассмотрим это на примере развертывания боковой поверхности наклонной призмы, развертку которой можно произвести тремя способами:

а) построения нормального сечения (рис. 305);
б) треугольников (рис. 306);
в) раскатки (рис. 307).

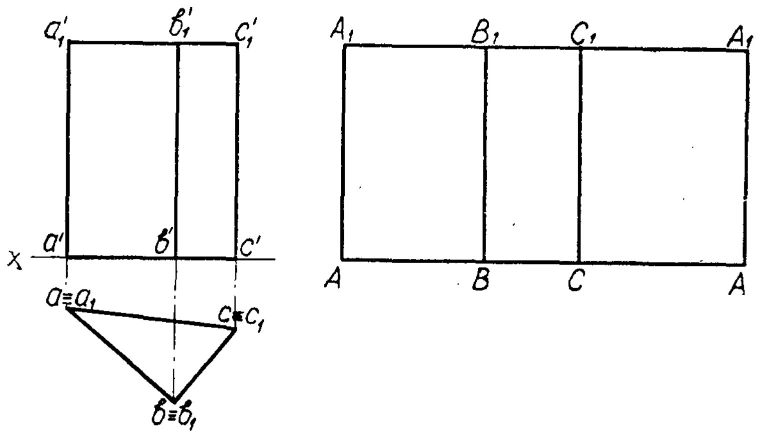


Рис. 304.

Сущность способа построения нормального сечения состоит в том, что:

1) поверхность призмы пересекается плоскостью, перпендикулярной к ее ребрам;

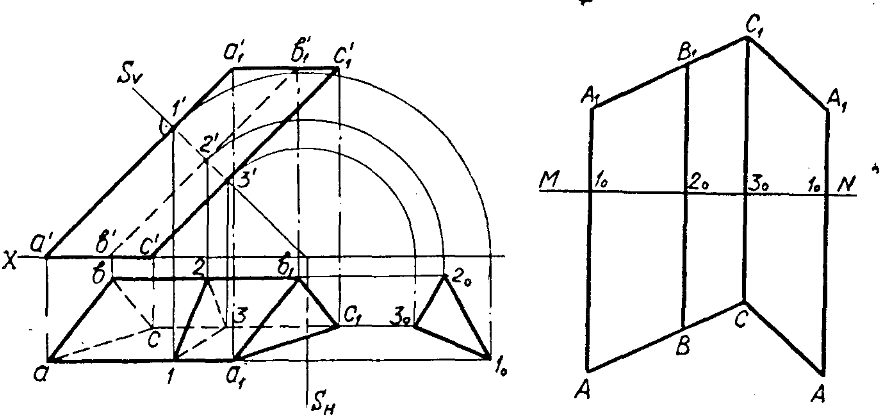


Рис. 305.

2) определяется натуральная величина фигуры сечения;

3) ломаная линия фигуры сечения в натуральную величину разворачивается в прямую линию, и на перпендикулярах, восстановленных из точек излома, откладываются натуральные величины соответствующих ребер призмы;

4) полученные точки соединяются между собой прямыми линиями.

Изображенная на рис. 305 призма расположена параллельно плоскости V, поэтому секущая плоскость S, перпендикулярная к ее ребрам, является фронтально-проецирующей. Фронтальная проекция фигуры сечения будет находиться на фронтальном следе S_v секущей плоскости. Натуральная величина фигуры сечения ($1_0 2_0 3_0$) найдена совмещением плоскости S с горизонтальной плоскостью проекций. Далее на произвольной прямой MN ломаная линия фигуры сечения развернута в свою натуральную величину, отмечены точки излома (точки 1_0, 2_0, 3_0), из которых восстановлены перпендикуляры к прямой MN и на них отложены натуральные величины соответствующих ребер призмы. Так как ребра призмы параллельны плоскости проекций V, то в данном случае их натуральная величина взята непосредственно с фронтальной проекции призмы.

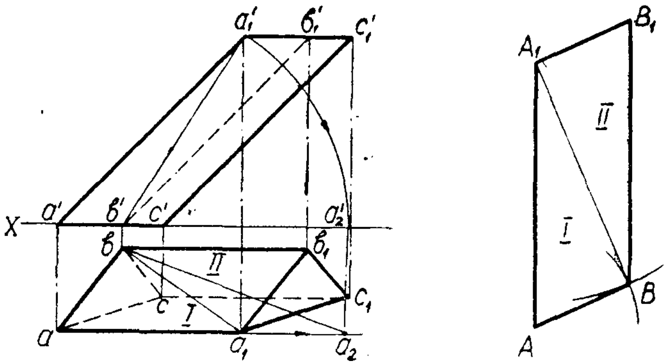


Рис. 306.

Способ треугольников (рис. 306) состоит в том, что грани призмы (четырехугольники) разбиваются диагоналями на треугольники, определяется длина сторон треугольников и производится последовательное построение этих треугольников на плоскости.

На рис. 306 грань ABB_1A_1 призмы разбита на два треугольника (I и II) и эти треугольники построены в плоскости чертежа. Истинная величина диагонали A_1B определена способом вращения.

Разбивка на треугольники остальных граней призмы и построение их на плоскости выполняются аналогично.

На рис. 307 развертка боковой поверхности призмы выполнена по способу раскатки. Для этого из фронтальных проекций всех вершин призмы восстановлены перпендикуляры к проекции $a'a_1'$ ребра AA_1, затем из точки a' радиусом ab проведена дуга до пересечения с перпендикуляром, восстановленным из точки b'. Получена точка B_0. Из точки B_0 радиусом bc проведена дуга до пересечения с перпендикуляром,

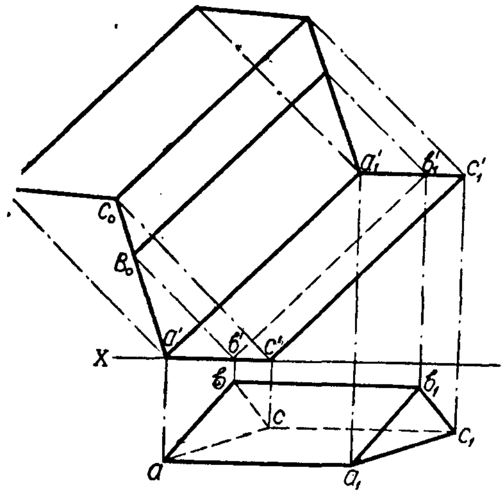


Рис. 307.

восстановленным из точки c', получена точка C_0 и т. д. Из точек B_0, C_0, A_0 проведены прямые, параллельные $a'a_1'$ до пересечения с соответствующими перпендикулярами из точек a_1', b_1', c_1'.

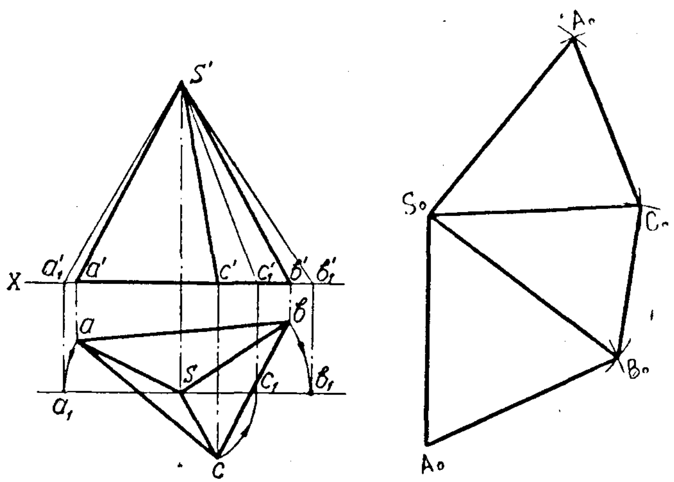


Рис. 308.

Указанный вариант целесообразен, когда величина сторон основания и ребер призмы может быть непосредственно взята с чертежа.

Для построения развертки боковой поверхности пирамиды вначале определяются величины ребер и сторон основания, а затем на плоскости чертежа строятся последовательно треугольники — грани пирамиды.

На рис. 308 показано построение развертки боковой поверхности пирамиды. Пирамида стоит на плоскости проекций H, поэтому горизонтальная проекция основания пирамиды будет выражать натуральный вид основания. Истинная величина ребер пирамиды найдена методом вращения.

§ 44. Развёртки поверхностей тел вращения

Развертывание цилиндрической поверхности производится аналогично развертыванию поверхности призмы. В цилиндр вписывается призма, которая и развертывается одним из приведенных способов, а затем вместо ломаных линий проводятся плавные кривые.

Развертывание конической поверхности производится аналогично развертыванию поверхности пирамиды. Для увеличения точности развертки цилиндрической и конической поверхностей необходимо увеличивать число граней вписанных в них призмы и пирамиды.

Прямой круговой цилиндр разворачивается в прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая — длине окружности основания $(2\pi R)$.

Развертка прямого кругового конуса, образующая которого равна l, и радиус основания R, имеет форму кругового сектора с радиусом l и центральным углом $\alpha = 360° \cdot \frac{R}{l}$;

Шаровая поверхность может быть развернута на плоскость только приближенно, так как она относится к неразвертываемым поверхностям. Один из способов приближенной развертки шаровой поверхности рассмотрен на рис. 309. Сущность этого способа состоит в том, что шаровая поверхность при помощи меридиальных плоскостей, проходящих через ось шара SP, разбивается на ряд одинаковых частей, так называемых *сферических двуугольников*. На рис. 309 шаровая поверхность разбита на 12 равных частей и показана горизонтальная проекция (pkl) только одной такой части.

Дуга $k4l$ заменена прямой mn, касательной к окружности, и эта часть шаровой поверхности заменена цилиндрической поверхностью с осью, проходящей через центр шара и параллельной касательной mn. Далее дуга $s'4'$ разделена на 4 равные части. Точки 1′, 2′, 3′, 4′ приняты за фронтальные проекции отрезков образующих цилиндрической поверхности с осью, параллельной mn. Их горизонтальные проекции: ab, cd, ef, mn.

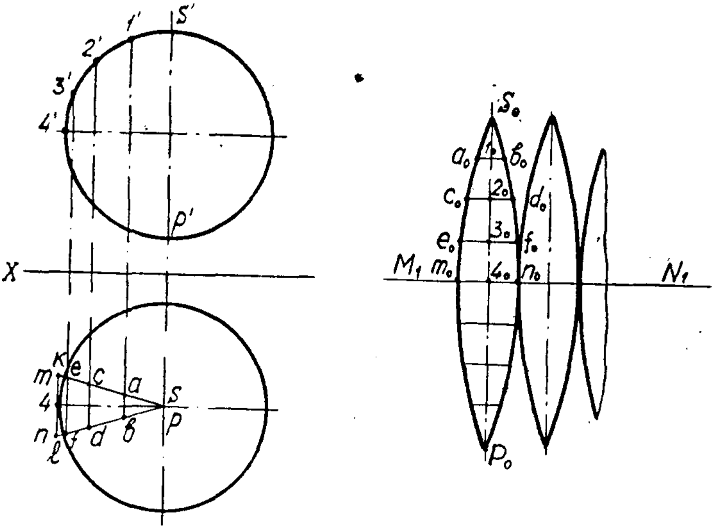


Рис. 309.

На произвольной прямой M_1N_1 отложен отрезок $m_0n_0 = mn$, через его середину проведен перпендикуляр к M_1N_1 и на нем отложены отрезки 4_03_0, 3_02_0, 2_01_0, 1_0S_0, равные соответствующим дугам $4'3'$, $3'2'$, $2'1'$, $1'S'$. Через полученные точки проведены линии, параллельные m_0n_0, и на них отложены соответственно отрезки ab, cd, ef. Крайние точки этих отрезков соединены плавной кривой. Получилась развертка одной из двенадцати частей шаровой поверхности. Для построения полной развертки шара надо вычертить 12 таких разверток.

Глава 10
ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Формы машинных деталей или инженерных сооружений можно с некоторым приближением рассматривать как сочетание различных геометрических форм — призм, конусов, цилиндров и пр. В пересечении их поверхностей получаются плоские или пространственные линии. При изображении деталей машин и сооружений на чертежах приходится строить проекции этих линий. Очень часто, например, при построении разверток изделий из листового материала, проекции линий пересечения должны быть определены и вычерчены с достаточной точностью.

§ 45. Пересечение поверхностей многогранников

Общий принцип построения линии пересечения двух многогранников заключается в определении точек пересечения ребер одного тела с гранями другого и, если это необходимо, в определении точек пересечения ребер второго тела с гранями первого, т. е. задача сводится к определению точек пересечения прямых с плоскостями.

Приступая к решению задачи, необходимо прежде всего рассмотреть заданные проекции и записать, сколько и какие именно ребра каждого из данных тел участвуют в пересечении, и подсчитать заранее, сколько должно получиться точек пересечения. Найденные точки последовательно соединить прямыми. Чтобы не сбиться в порядке соединения, надо помнить: 1) соединять между собой можно только такие точки, которые лежат в одной и той же грани каждого из двух пересекающихся тел; 2) каждая точка соединяется с двумя и только с двумя другими точками; 3) в результате соединения должен получиться замкнутый контур (или несколько замкнутых контуров).

При определении видимости точек, принадлежащих линии пересечения, руководствуются следующим правилом: *проекция точки, полученная при пересечении двух видимых линий, видима. Точка пересечения двух невидимых или одной видимой и другой невидимой линий невидима.*

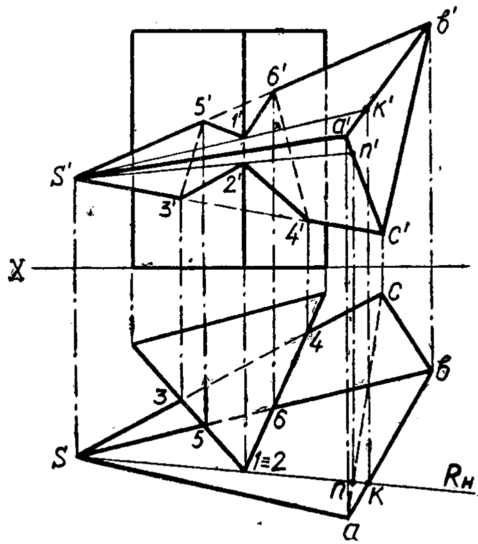


Рис. 310.

На рис. 310 показано построение линии пересечения поверхностей призмы и пирамиды. Как видно из чертежа, с поверхностью пирамиды пересекается только одно переднее ребро призмы. Для определения точек пересечения его с поверхностью пирамиды через ребро и вершину пирамиды проведена вспомогательная горизонтально - проецирующая плоскость R. Она пересекла поверхность пирамиды по прямым SN и SK, в пересечении с которыми переднего ребра призмы определены точки входа и выхода 1 и 2. Горизонтальные проекции точек пересечения ребер пирамиды SB и SC с поверхностью призмы совпадут с горизонтальной проекцией граней призмы, т. к. грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями. Фронтальные проекции этих точек определены по линиям связи. Соединив последовательно между собой фронтальные проекции найденных точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения. Горизонтальная проекция ее совпадает с горизонтальной проекцией призмы. Необходимо помнить, что соединять между собой найденные точки можно только те, которые лежат на одной грани каждого из пересекающихся тел. Нельзя, например, соединять точки $1'$ и $3'$, т. к. они хотя и находятся на одной грани призмы, но лежат на различных гранях пирамиды.

При пересечении многогранников, находящихся в общем положении относительно плоскостей проекций, в некоторых случаях целесообразно в качестве вспомогательных плоскостей выбрать плоскости общего положения, проходящие через вершину пирамиды параллельно ребрам призмы. (Подробно о таких плоскостях см. В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. М. 1965, стр. 269—272).

§ 46. Взаимное пересечение кривых поверхностей

Кривые поверхности пересекаются по пространственным или плоским кривым линиям, проекции которых обычно строятся по точкам. Точки, принадлежащие линии пересечения, находятся при помощи вспомогательных секущих поверхностей следующим образом: *через два пересекающихся тела проводят вспомогательную секущую поверхность, затем определяют линии пересечения обоих тел этой поверхностью и, наконец, отмечают точки пересечения двух линий пересечения.*

В качестве вспомогательных секущих поверхностей применяются плоскости или шаровые поверхности. В связи с этим различают два способа определения линии пересечения двух тел вращения: *способ секущих плоскостей* и *способ секущих шаровых поверхностей.* Вспомогательные поверхности выбираются таким образом, чтобы в пересечении их с каждым из пересекающихся тел получились простые для построения линии — прямые или окружности.

Если из двух пересекающихся поверхностей хотя бы одна — линейчатая, возможен третий способ определения линии пересечения, заключающийся в определении точек, в которых прямолинейные образующие одной поверхности пересекают другую поверхность.

На рис. 311 показано построение линии пересечения цилиндра и конуса способом вспомогательных секущих плоскостей. В качестве вспомогательных плоскостей здесь удобно выбрать горизонтальные секущие плоскости, которые пересекают поверхность цилиндра по прямым линиям — образующим цилиндра, а поверхность конуса — по окружностям.

Фронтальные или профильные секущие плоскости будут неудобны для решения данной задачи, т. к. они (кроме плоскостей, проходящих через вершину конуса) будут пересекать конус по гиперболам, построение которых на чертеже затруднительно. В этом примере вначале найдены характерные точки линии пересечения: высшая и низшая точки A и B и точки C и D, разделяющие горизонтальную проекцию кривой на видимую и невидимую части.

Точки A и B определены при помощи вспомогательных горизонтальных плоскостей, проходящих через верхнюю и нижнюю образующие цилиндра, пересекающие конус по окружностям. Точки C и D найдены при помощи горизонтальной плоскости T, проведенной через ось цилиндра. Плоскость T пересекает поверхность цилиндра по крайним образующим (передней и задней), а поверхность конуса — по окружности. Пересечения горизонтальных проекций крайних образующих и окружности дают точки c и d — горизонтальные проекции точек C и D. Фронтальные проекции этих точек лежат на фронтальном следе плоскости T.

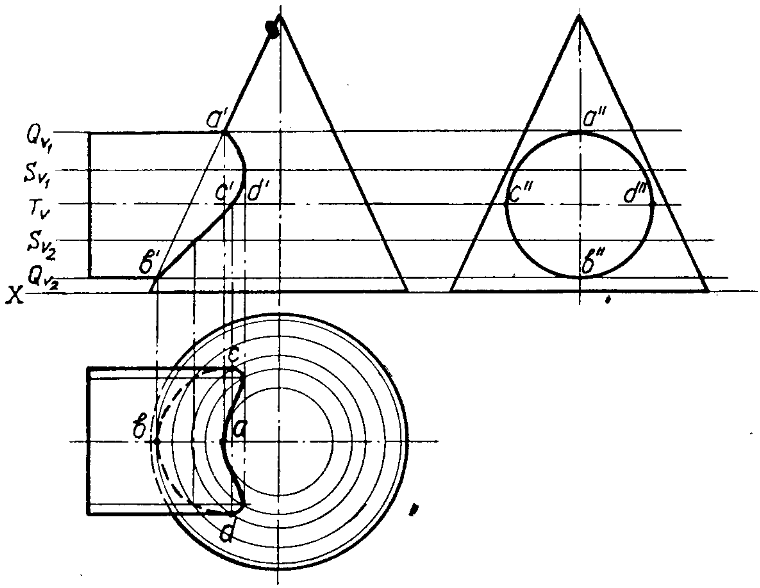


Рис. 311.

Промежуточные точки линии пересечения найдены при помощи горизонтальных плоскостей S_1 и S_2. Этот пример можно было бы решить при помощи вспомогательных профильно-проецирующих плоскостей, проходящих через вершину конуса. Эти плоскости будут пересекать поверхности конуса и цилиндра по прямым линиям — образующим, в пересечении которых находятся точки, принадлежащие линии пересечения этих тел. Однако применение таких плоскостей усложнит построения. Если конус и цилиндр будут находиться в общем положении относительно плоскостей проекций, то в качестве вспомогательных секущих плоскостей удобно выбрать плоскости общего положения, проходящие через вершину конуса параллельно образующим цилиндра. При определении линии пересечения двух цилиндров общего положения в качестве вспомогательных секущих плоскостей удобно применить плоскости общего положения, проходящие параллельно образующим обоих цилиндров.

Линия пересечения двух кривых поверхностей в общем случае является пространственной кривой линией. Однако в некоторых случаях в пересечении могут получиться плоские кривые (эллипсы, окружности, параболы и гиперболы) и даже прямые линии. Их необходимо знать, чтобы, встречаясь с ними на практике, не тратить времени на излишние построения.

Вот некоторые из них:

1) два круговых цилиндра одинакового диаметра, оси которых пересекаются под прямым углом, пересекаются по плоским кривым линиям — эллипсам (рис. 312). Если оси ци-

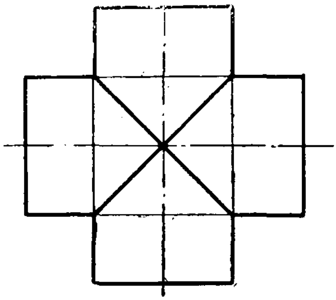


Рис. 312.

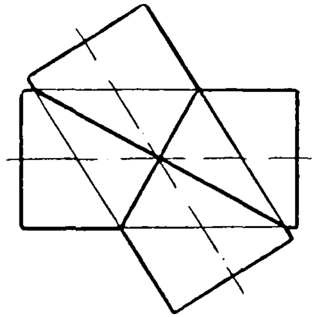


Рис. 313.

линдра параллельны какой-либо из плоскостей проекций, то на эту плоскость эллипсы проецируются в виде отрезков прямых линий. Этот случай особенно часто встречается в технических формах, например, при пересечении труб, бревен, сверлений и т. п.;

2) два круговых цилиндра одинакового диаметра, оси которых пересекаются под произвольным углом (рис. 313); в пересечении получаются также два эллипса, но разных размеров;

3) конус и цилиндр или два конуса, описанные вокруг одного и того же шара, пересекаются по эллипсам (рис. 314);

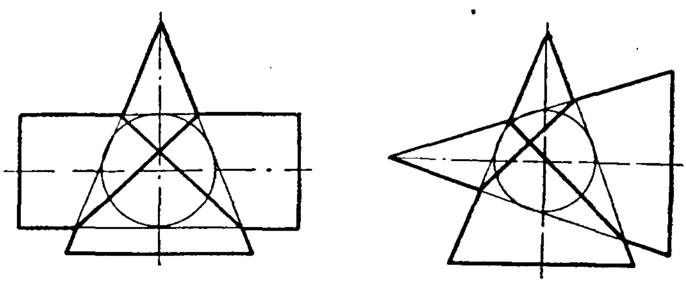


Рис. 314.

4) две какие-либо поверхности вращения, описанные вокруг общего шара, тоже пересекаются по двум эллипсам (рис. 315);

5) два цилиндра с параллельными образующими пересекаются по параллельным прямым (рис. 316);

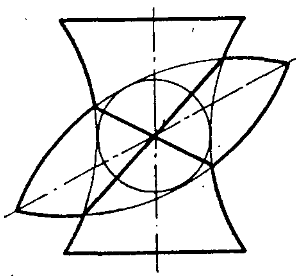


Рис. 315.

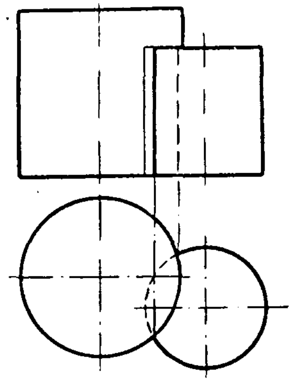


Рис. 316.

6) два конуса с общей вершиной пересекаются по прямым, сходящимся в вершине конуса, т. е. по образующим (рис. 317);

7) шар со всякой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр шара, например, с конусом или цилиндром (рис. 318), пересекается по окружностям; плоскости этих

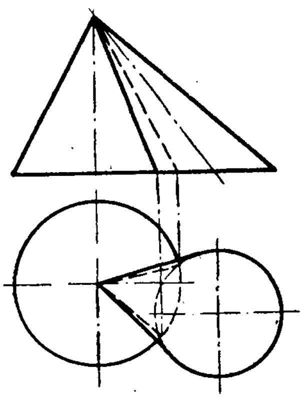


Рис. 317.

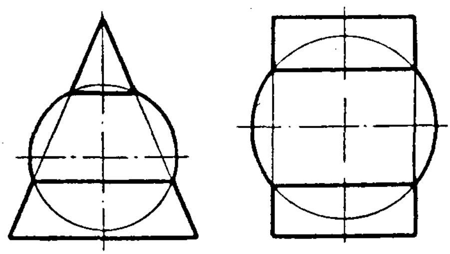


Рис. 318.

окружностей перпендикулярны к оси поверхности вращения. Если ось поверхности вращения параллельна какой-либо одной из плоскостей проекций, то на эту плоскость окружности проецируются в виде отрезков прямых линий.

На последнем примере основан второй способ определения линии пересечения двух тел вращения, называемый способом секущих шаровых поверхностей или способом сфер. На рис. 319 показано определение этим способом линии пересечения конуса и цилиндра.

Оси заданных поверхностей вращения пересекаются в точке O и параллельны плоскости проекций V, следовательно, условия, необходимые для применения способа сфер, имеются.

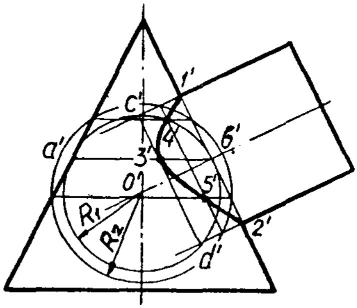


Рис. 319.

Точки $1'$ и $2'$ — фронтальные проекции точек пересечения крайних образующих конуса и цилиндра отмечаются непосредственно на чертеже. Для нахождения крайней точки 3 из точки O описана наименьшая сферическая поверхность радиуса R_1. Она только касается поверхности конуса и, следовательно, пересекает ее по окружности, фронтальная проекция которой — прямая $a'b'$. Эта сферическая поверхность пересекает цилиндр также по окружности, фронтальная проекция которой — прямая $c'd'$. Пересечение этих прямых — точка $3'$ есть фронтальная проекция одной из точек искомой линии пересечения. Промежуточные точки (4 и 5) линии пересечения построены при помощи сферической поверхности радиуса R_2, описанной вокруг точки O. Горизонтальные проекции найденных точек могут быть построены как проекции точек, лежащих на поверхности конуса.

Этот способ выгодно отличается от способа секущих плоскостей своей простотой и компактностью, т. к. линию пересечения можно строить, используя только одну проекцию, но применять его можно лишь при условии, если оси тел вращения пересекаются и расположены параллельно какой-либо плоскости проекций. Такие случаи на практике встречаются довольно часто.

При определении линии пересечения многогранника с телом вращения используется обычно метод вспомогательных секущих плоскостей.

Глава 11
АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 47. Общие сведения

В некоторых случаях при выполнении технических чертежей необходимо иметь, кроме ортогональных проекций, более наглядные изображения. Для построения таких изображений применяют проекции, называемые *аксонометрическими,* или сокращенно — *аксонометрией.*

Аксонометрия дает наглядное изображение детали или сооружения. Она облегчает работу конструктора, позволяет в процессе работы, путем аксонометрических набросков, быстрее выполнить те или иные детали проектируемой конструкции, выявляя попутно способы будущей обработки предмета. Аксонометрия дает возможность в процессе работы объяснить какую-нибудь конструкцию лицу, плохо разбирающемуся в ортогональном чертеже. Аксонометрические проекции играют самостоятельную роль при проектировании схем трубопроводов, электропроводов, маслопроводов и т. д.

Метод аксонометрического проецирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат параллельно проецируется на некоторую плоскость, называемую плоскостью аксонометрических проекций. Аксонометрическая проекция есть проекция только на одну плоскость, а не на две или более, как это имеет место в системе ортогональных проекций.

Для того чтобы изображаемый предмет был виден с трех сторон, оси ортогональных проекций располагают под острыми углами к плоскости аксонометрических проекций. Ни одна из осей ортогональных проекций не проецируется на плоскость аксонометрических проекций в точку, а значит сам предмет спроецируется на эту плоскость проекций в трех измерениях.

На рис. 320 показана схема проецирования прямоугольных осей на плоскость аксонометрических проекций A. Проекции осей координат X_1, Y_1, Z_1 на плоскость A называются *аксонометрическими осями.* На осях координат в пространстве отложены равные отрезки $OM = OB = OC$. Их проекции на плоскости A: O_1m_1, O_1b_1, O_1c_1 — в общем случае не равны самим отрезкам OM, OB, OC и не равны между собой. Это значит, что размеры предмета в аксонометрических проекциях по всем трем осям искажаются. *Величина, показывающая, во сколько раз проекция меньше самого отрезка, называется коэффициентом искажения, или показателем искажения.* Величина коэффициентов искажения и соотношение между ними зависят от расположения осей ортогональных проекций относительно плоскости аксонометрических проекций и от направления проецирования.

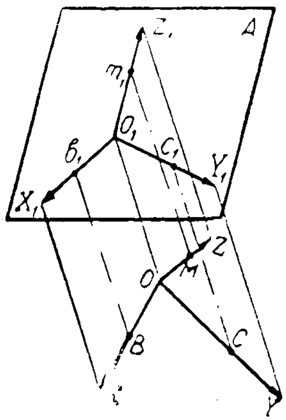


Рис. 320.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения по осям различают три вида аксонометрических проекций.

1) *Изометрическая проекция,* или, сокращенно, *изометрия,* когда коэффициенты искажения по всем трем осям одинаковы.

2) *Диметрическая проекция,* или *диметрия,* когда коэффициенты искажения по двум осям равны между собой, а третий не равен.

3) *Триметрическая проекция,* или *триметрия,* когда коэффициенты искажения по всем трем осям не равны между собой. Триметрия большого практического значения не имеет.

В зависимости от направления проецирования различают: *прямоугольную аксонометрию,* когда проецирующие лучи направлены перпендикулярно к плоскости аксонометрических проекций, и *косоугольную аксонометрию,* когда проецирующие лучи направлены под острым углом к плоскости аксонометрических проекций.

В данном курсе лекций будут рассмотрены только два вида аксонометрических проекций: прямоугольная изометрия и прямоугольная диметрия.

§ 48. Изометрическая проекция

В изометрической проекции коэффициенты искажения по осям равны между собой, а это значит, что оси ортогональных проекций наклонены к плоскости аксонометрических проекций под одинаковыми углами, а следовательно, и аксонометрические оси на плоскости проекций будут расположены под одинаковыми углами друг к другу.

На рис. 321 показаны оси прямоугольной изометрической проекции. Ось Z_1 принято располагать вертикально, оси X_1 и Y_1 составляют с осью Z_1 угол 120°. Практически оси можно построить при помощи циркуля, проведя окружность и разделив ее на три равные части при помощи транспортира или рейсшины и чертежного угольника с углом 30°. Последний способ более применим, т. к. он достаточно точен и не требует много времени для построения осей и изометрической проекции фигуры.

Математически просто определить угол наклона осей ортогональных проекций к плоскости аксонометрических проекций. Он равен $\approx 35°$ (точнее $35° 15'$). Отсюда легко определить величину аксонометрических проекций отрезков OM, OB и OC (рис. 320): $O_1m_1 = OM \cdot \cos 35°$; $O_1b_1 = OB \cdot \cos 35°$; $O_1c_1 = OC \cdot \cos 35°$. Но $\cos 35° = 0{,}8192$, округленно: 0,82. Подставляя это значение, получим: $O_1m_1 = OM \cdot 0{,}82$; $O_1b_1 = OB \cdot 0{,}82$; $O_1c_1 = OC \cdot 0{,}82$; т. е. величина аксонометрической проекции отрезка, расположенного на осях координат, уменьшается по сравнению с самим отрезком в 0,82 раза. Во столько же раз уменьшаются аксонометрические проекции всех отрезков, расположенных параллельно соответствующим осям ортогональных проекций. Эта величина называется *коэффициентом искажения в изометрической проекции.*

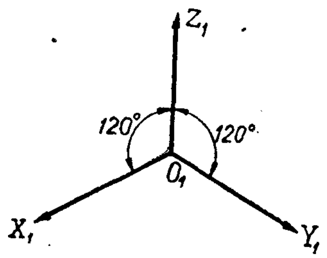


Рис. 321.

Если координаты x, y и z какой-либо точки A известны, то для построения этой точки в изометрической прямоугольной проекции надо умножить их на 0,82 и отложить по направлениям соответствующих аксонометрических осей. Это построение выполнено на рис. 322. Точка A_1 есть прямоугольная изометрия точки A, заданной координатами x, y и z.

Изометрическую проекцию любой фигуры строят аналогично, откладывая вдоль аксонометрических осей координаты основных точек фигуры с учетом коэффициента искажения по осям.

Если окружность расположена в какой-либо из плоскостей проекций или в плоскости, параллельной плоскости проекций, то в изометрической проекции она изобразится в виде эллипса. Большая ось этого эллипса будет равна диаметру окружности, а малая — диаметру окружности, умноженному на косинус угла наклона плоскости ортогональных проекций к плоскости аксонометрических проекций. Угол наклона плоскости $\approx 55°$, $\cos 55° \approx 0{,}58$; следовательно, малая ось эллипса равна диаметру окружности, умноженному на 0,58. Зная эти соотношения, легко построить изометрическую проекцию окружности заданного диаметра.

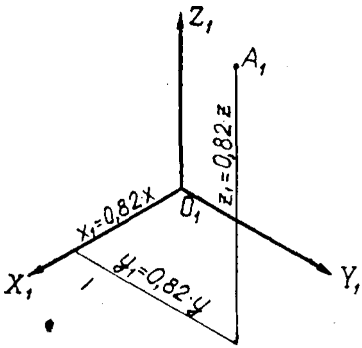


Рис. 322.

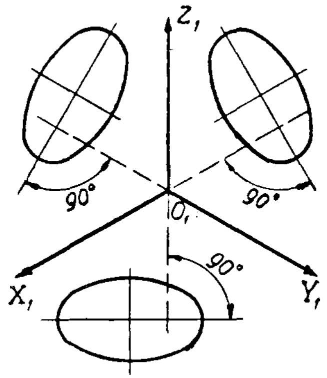


Рис. 323.

Если окружность расположена в горизонтальной плоскости проекций или в плоскости, ей параллельной, то на плоскость аксонометрических проекций она спроецируется в виде

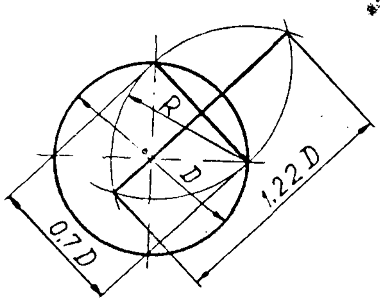


Рис 324.

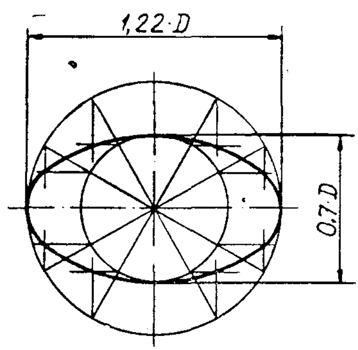


Рис. 325.

эллипса, большая ось которого будет перпендикулярна к оси Z_1, а малая ось эллипса всегда перпендикулярна к большой оси и проходит через ее середину (рис. 323). На рис. 323 изображена схема расположения осей эллипсов при прямоугольном изометрическом проецировании окружностей, расположенных в плоскостях, соответственно параллельных плоскостям проекций.

На практике, для упрощения построений, строят изометрические изображения без уменьшения размеров в

0,82 раза, т. е. по *приведенным коэффициентам искажения,* откладывая вдоль осей аксонометрических проекций размеры, взятые непосредственно с ортогонального чертежа. При этом получается несколько увеличенное изображение (в 1,22 раза), что не отражается на его наглядности. В таком же отношении увеличатся и оси эллипсов. Большая ось эллипса будет равна диаметру окружности, умноженному на 1,22, малая ось эллипса — диаметру окружности, умноженному на 0,7.

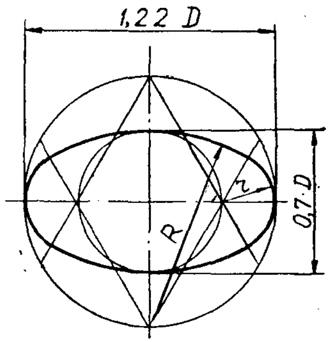


Рис. 326.

На практике часто определяют величину осей эллипса графически (рис. 324). Один из способов построения эллипса по заданным осям показан на рис. 325.

В некоторых случаях, когда не требуется точных построений, эллипс можно заменить четырехцентровым овалом (рис. 326). В изометрической проекции эллипс можно построить еще по восьми точкам, четыре из которых являются кон-

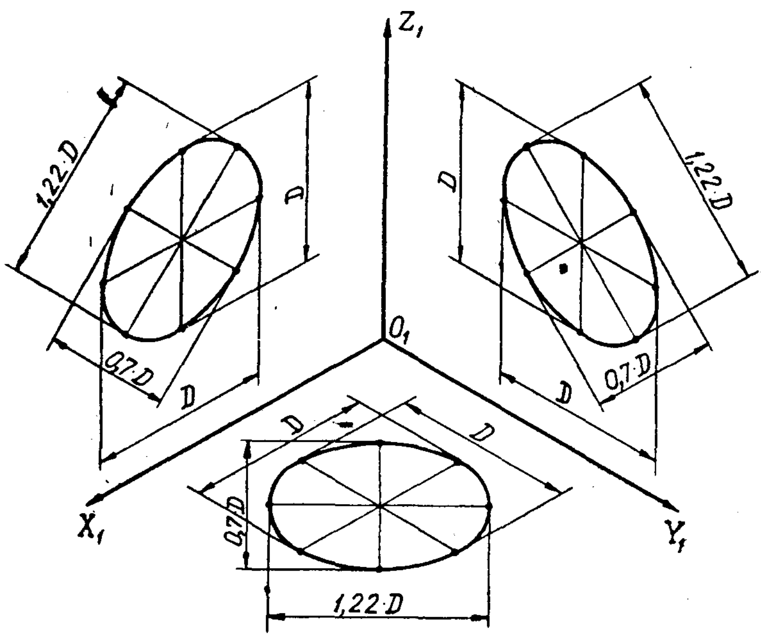


Рис. 327.

цами большой и малой осей эллипса, а остальные четыре точки — концами двух сопряженных диаметров эллипса, параллельных, соответственно, двум из осей X_1, Y_1, Z_1 (в зависимости от того, какой плоскости координат параллельна плоскость, в которой лежит рассматриваемая окружность). Эти сопряженные диаметры при указанном выше увеличении (1,22) равны диаметру изображаемой окружности.

На рис. 327 показано нахождение восьми точек эллипса. Найденные восемь точек позволяют начертить самый эллипс достаточно точно даже от руки.

§ 49. Диметрическая проекция

В диметрической проекции коэффициенты искажения по осям X_1 и Z_1 равны 0,94, а по оси Y_1 — 0,47. (Определение коэффициентов искажения по осям в аксонометрических проекциях см. В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. М. 1965, стр. 320—330).

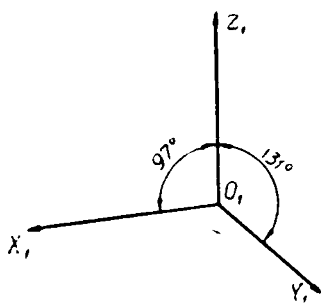


Рис. 328.

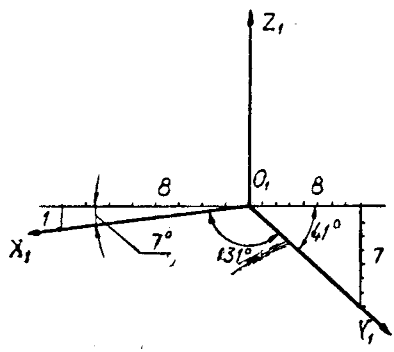


Рис. 329.

На рис. 328 показаны оси прямоугольной диметрической проекции. Ось Z_1 располагается вертикально, ось X_1 составляет с осью Z_1 угол 97° (точнее 97° 10′), угол между осями Y_1 и Z_1 равен 131° (точнее — 131° 25′).

Практически оси можно построить при помощи транспортира или же, как показано на рис. 329. Через точку O_1 проводят горизонтальную прямую и откладывают на ней восемь равных делений в обе стороны от точки O_1. В конечных точках проводят ординаты и откладывают на одной из них одно деление, на другой — семь таких же делений и соединяют полученные точки с O_1.

На рис. 330 показано построение точки A, имеющей координаты x, y, z, в диметрической прямоугольной проекции.

Диметрическую проекцию любой фигуры строят аналогично, откладывая вдоль аксонометрических осей координаты основных точек фигуры с учетом коэффициента искажения по осям.

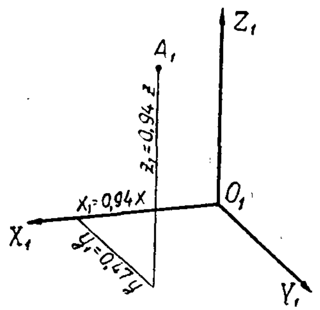


Рис. 330.

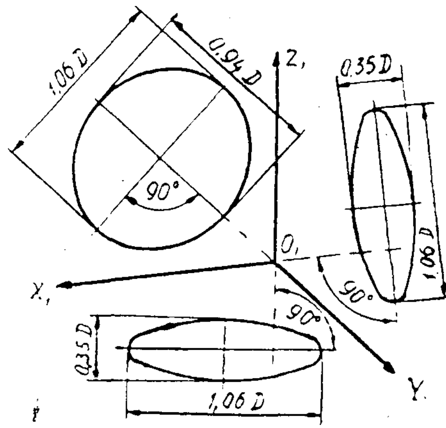


Рис. 331.

Окружности, расположенные в горизонтальной и профильной плоскостях, изображаются в диметрической проекции в виде эллипсов с отношением малой оси к большой 1 : 3; окружность, расположенная во фронтальной плоскости, изображается в диметрической проекции в виде эллипса с отношением осей 9:10. Направления осей эллипсов остаются такими же, как и в изометрии, т. е. большие оси всех эллипсов перпендикулярны к соответствующим аксонометрическим осям, а малые оси перпендикулярны к большим и проходят через их середину.

На практике, при построении диметрической проекции, размеры, параллельные осям O_1X_1 и O_1Z_1, откладываются в натуральную величину, без уменьшения их в 0,94 раза; а размеры, параллельные оси O_1Y_1, сокращаются в два раза. В результате изображение получается увеличенным в 1,06 раза. В таком же отношении увеличатся и оси эллипсов.

На рис. 331 показано расположение и размеры осей эллипсов в диметрической проекции с учетом *приведенных коэффициентов искажения*. Эллипсы в диметрической проекции можно строить по заданным осям и по восьми точкам аналогично построению эллипсов в изометрической проекции. В некоторых случаях, когда не требуется особо точных построений, эллипсы могут быть заменены четырехцентровыми овалами. Построение овалов, по форме приближающихся к эллипсам, показано на рис. 332.

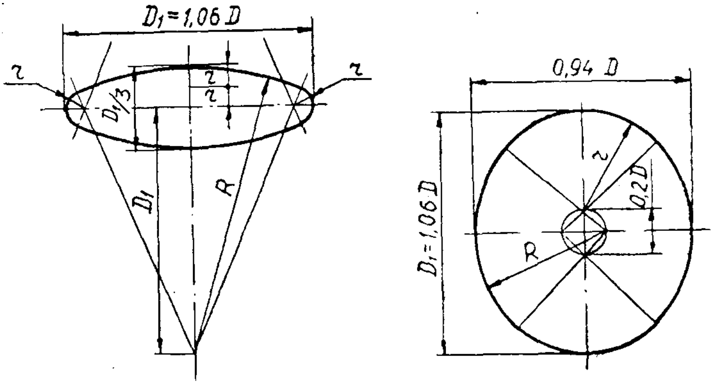


Рис. 332.

§ 50. Примеры построения аксонометрических проекций фигур по заданным их ортогональным проекциям

1) Призма (рис. 333).

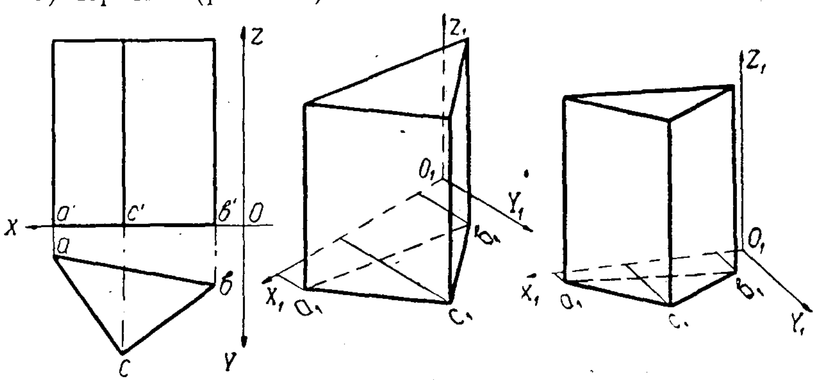


Рис. 333.

2) Пирамида (рис. 334).

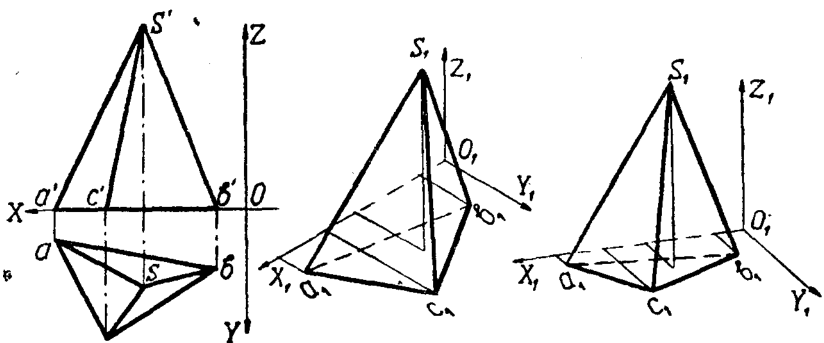


Рис. 334.

3) Цилиндр (рис. 335).

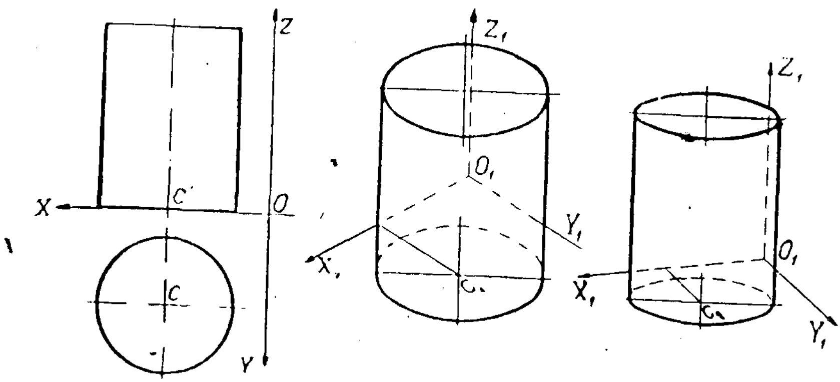


Рис. 335.

4) Конус (рис. 336).

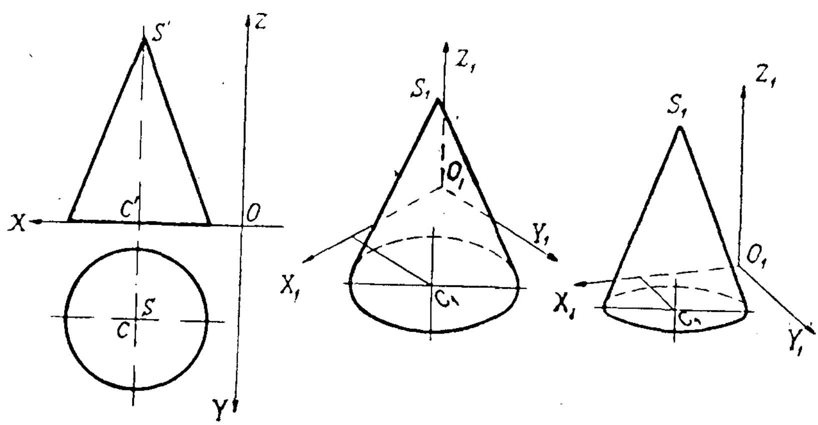


Рис. 336.

5) Шар (рис. 337).

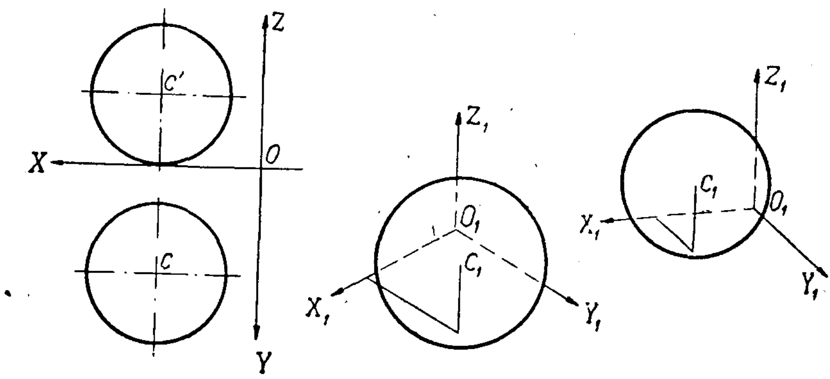


Рис. 337.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
2. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М., «Наука», 1965.
3. Иерусалимский А. М. Начертательная геометрия. М., Гостехиздат, 1954.
4. Крылов Н. А., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1963.
5. Островский А. И. Начертательная геометрия в популярном изложении. М., Физматгиз, 1963.
6. Гордон В. О., Иванов Ю. Б., Солнцева Т. Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. М., «Наука», 1967.
7. Рудаев А. К. Сборник задач по начертательной геометрии. М., Физматгиз, 1962.
8. Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии. М., «Машиностроение», 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

40 коп.

76

Д 4
9246